МИНИСТЕРСТВО ЦИФРОВОГО РАЗВИТИЯ,
СВЯЗИ И МАССОВЫХ КОММУНИКАЦИЙ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ ИМ. ПРОФ. М.А. БОНЧ-БРУЕВИЧА»
(СПбГУТ)

Санкт-Петербургский колледж телекоммуникаций им. Э.Т. Кренкеля

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора
по учебной работе
Ка Н.В. Калинина
31 августа 2022 г

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ

по учебной дисциплине
ЕН.01. МАТЕМАТИКА

по специальности
10.02.04 Обеспечение информационной безопасности телекоммуникационных систем
(код и наименование специальности)
квалификация
техник по защите информации
среднего профессионального образования

Санкт-Петербург
2022

ЕН.01. Математика. Методические указания по выполнению самостоятельных работ. Составил А.А.Обудовская – Санкт-Петербург, 2022.

Методические указания содержат описания самостоятельных работ, предусмотренных рабочей программой ЕН.01. Математика. Количество внеурочных самостоятельных работ 16, общий объём составляет 16 часов. Нумерация рисунков, формул и таблиц в пределах одной работы. Методические указания предназначены для обучающихся очной формы обучения по специальности 10.02.04. Обеспечение информационной безопасности телекоммуникационных систем.

Рассмотрено и одобрено предметной (цикловой) комиссией Математических и естественно-научных дисциплин Санкт-Петербургского колледжа телекоммуникаций им. Э.Т. Кренкеля.

СОДЕРЖАНИЕ

№ п/п		
1.	Пояснительная записка	4
2.	Перечень самостоятельных работ	4
3.	Самостоятельная работа № 1. Действия с матрицами. Вычисление определителей.	5
4.	Самостоятельная работа № 2. Решение геометрических задач с использованием скалярного и векторного произведения векторов	8
5.	Самостоятельная работа № 3. Вычисление пределов с помощью замечательных пределов, раскрытие неопределённостей	12
6.	Самостоятельная работа № 4. Нахождение производной сложной функции.	14
7.	Самостоятельная работа № 5. Замена переменной и интегрирование по частям.	17
8.	Самостоятельная работа № 6. Исследование сходимости числовых рядов.	19
9.	Самостоятельная работа № 7. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.	25
10.	Самостоятельная работа № 8. Решение задач на классическое определение вероятностей, вычисление вероятностей с использованием теоремы сложения и умножения вероятностей.	27
11.	Список литературы и других источников	29

1. ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Самостоятельные работы разработаны в рамках рабочей программы учебной дисциплины ЕН.01. Математика – являющейся частью основной профессиональной образовательной программы в соответствии с ФГОС СПО по специальности 10.02.04 Обеспечение информационной безопасности телекоммуникационных систем.

Учебная дисциплина ЕН.01. Математика обеспечивает формирование общих компетенций по всем видам деятельности ФГОС по специальности 10.02.04 Обеспечение информационной безопасности телекоммуникационных систем.

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности;

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие;

ОК 09. Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности;

2. ПЕРЕЧЕНЬ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ

№	Наименование	Часы
1	Действия с матрицами. Вычисление определителей	2ч.
2	Решение геометрических задач с использованием скалярного и векторного произведения векторов	2ч.
3	Вычисление пределов с помощью замечательных пределов, раскрытие неопределённостей	2ч.
4	Нахождение производной сложной функции.	2ч.
5	Замена переменной и интегрирование по частям.	2ч.
6	Исследование сходимости числовых рядов.	2ч.
7	Дифференциальные уравнения и их практическое применение	2ч.
8	Решение задач на классическое определение вероятностей, вычисление вероятностей с использованием теоремы сложения и умножения вероятностей	2ч.

Самостоятельная работа № 1

ТЕМА. ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

1. **Цели работы**:

- развитие общих компетенций;
- формирование умений работы с информацией;
- формирование понимания темы;
- формирование умения анализировать;
- закрепление понятий линейной алгебры;
- освоение методов вычисления определителей и действий над матрицами.

2. **Задача:**

Решить примеры

3. **Подготовка к работе и порядок выполнения:**

- Изучить теоретический материал лекционных занятий, учебной литературы, Интернет-ресурсов, раздела «Краткие сведения из теории» соответствующего описания ПЗ
- Выполнить практические задания.

Практические задания:

1. Найти матрицы:

1) $C = A - B$, где А $= \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ -8 & 3 & -1 \\ 6 & -5 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -5 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2) $C = 3A - 2B$, где А $= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 7 \\ -1 & 2 & -5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix}$;

3) $D = 2A - 4B + 5C$, где $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 2 \\ 0 & 6 & -8 \\ 3 & -9 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -1 \\ 9 & -2 & 5 \\ 3 & -8 & 4 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -3 & 6 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

2. Найти произведение матриц AB:

1) $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 8 \end{pmatrix},\ \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 2 & -5 & 7 \end{pmatrix}$

2) $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix},\ \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

3) $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix},\ \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ -2 & -5 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Найти значение матричного многочлена, где Е- единичная матрица второго порядка, если $2A^2 + 3(B - 4E)$. если

   1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$;
   2) A = $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$;
   3) A = $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$;

4. Вычислить определитель второго порядка

   1) $\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$;

   2) $\begin{vmatrix} -2 & 9 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$;

   3) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$.

5. Вычислить определитель третьего порядка

   1) $\begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 \\ 9 & 7 & 5 \\ 7 & 5 & 3 \end{vmatrix}$;

   2) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$;

   3) $\begin{vmatrix} 7 & -5 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \\ 8 & -8 & 3 \end{vmatrix}$

4. Необходимое оборудование

5. Критерии оценки

5 – все задания выполнены верно. Решения подробно расписаны, получены правильные ответы.

4 – выполнено верно более 75 процентов заданий. Должны быть приведены подробные решения примеров.

3 - правильно или с небольшими неточностями выполнено более 50 процентов самостоятельной работы. Помимо ответов обязательно наличие решения примеров.

2 - правильно выполнено менее 50 процентов самостоятельной работы.

6. Пояснения к работе:

Понятие определителя

Определителем второго порядка, соответствующим таблице элементов $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, называется

число Δ, которое определяется равенством $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Диагональ, на которой находятся элементы a_{11} и a_{22}, называется главной, а диагональ, на которой находятся элементы a_{21} и a_{12} – побочной.

Определитель третьего порядка, соответствующий таблице элементов

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, определяется равенством

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

(разложение определителя третьего порядка по элементам первой строки).

Действия над матрицами

Суммой двух матриц A и B называется матрица, определяемая равенством

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+a_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}.$$

Произведением числа m на матрицу A называется матрица, определяемая равенством

$$\mathrm{m}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma_{11} & ma_{12} & ma_{13} \\ ma_{21} & ma_{22} & ma_{23} \\ ma_{31} & ma_{32} & ma_{33} \end{pmatrix}.$$

Произведение двух матриц A и B называется матрица, определяемая равенством

$$\mathrm{AB}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j3} \\ \sum_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j3} \\ \sum_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j3} \end{pmatrix}.$$

Самостоятельная работа № 2

Тема. Решение геометрических задач с использованием скалярного и векторного произведения векторов

1. **Цели работы**:
– развитие общих компетенций;
– формирование умений работы с информацией;
– формирование понимания темы;
– формирование умения анализировать;
– закрепление понятий векторной алгебры;
– формирование умения применять действий над векторами при решении геометрических задач.
2. **Задача:** Решить примеры.
3. **Подготовка к работе и порядок выполнения работы:**
- изучить представленный материал;
- на основе изученного материала выполнить задания

Варианты самостоятельной работы по теме *«С*калярное и векторное произведения векторов и их приложения*»*.

Вариант 1.

1. Разложить вектор $\overline{C} = (4, 5)$ по векторам $\overline{a} = (5, 4)$ и $\overline{b} = (1, -1)$.

2. Дано: $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 5$, $|\overline{c}| = 8$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b}) = 90^0$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{c}) = 90^0$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{c}) =$

$= (\overline{b}\hat{\ }\overline{c}) = 60^0$, Найти $(3\overline{a} - 2\overline{b})\,(\overline{b} + 3\overline{c})$.

3. Вычислить проекцию вектора $\overline{a} = (5, 2, 5)$ на ось вектора $\overline{AB}$, если $A(-1, 1, 0)$ и $B(1, 0, 2)$.

4. Дано: $|\overline{a}| = 4$, $|\overline{b}| = 6$. Найти, при каком α векторы $\overline{a} + \alpha\overline{b}$ и $\overline{a} - \alpha\overline{b}$ будут взаимно перпендикулярны.

5. Вычислить $|[\overline{a}\overline{b}]|$, если $|\overline{a}| = 8$, $|\overline{b}| = 15$ и $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b}) = 90^0$.

Вариант 2.

1. Разложить вектор $\overline{\mathrm{C}} = (3, 6)$ по векторам $\overline{a} = (5, 4)$ и $\overline{b} = (1, -1)$.

2. Дано: $|\overline{a}| = 2$, $|\overline{b}| = 1$, $|\overline{c}| = 8$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b}) = 90^0$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{c}) = (\overline{b}\hat{\ }\overline{c}) = 60^0$. Найти $(3\overline{a} - 2\overline{b})(\overline{b} + 3\overline{c})$.

3. Вычислить проекцию вектора $\overline{a} = (3, 2, 2)$ на ось вектора $\overline{AB}$, если A (1, -2, 7) и B(4, 2, 7).

4. Дано: $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 5$. Найти, при каком α векторы $\overline{a} + \alpha\overline{b}$ и $\overline{a} - \alpha\overline{b}$ будут взаимно перпендикулярны.

5. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(2, 3, 4)$, $B(1, 0, 6)$ и $C(4, 5, -2)$.

Вариант 3.

1. Разложить вектор $\overline{\mathrm{C}} = (2, 7)$ по векторам $\overline{\mathrm{a}} = (5, 4)$ и $\overline{\mathrm{b}} = (1, -1)$.

2. Дано: $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 5$, $|\overline{c}| = 8$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b}) = 90^0$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{c}) = (\overline{b}\hat{\ }\overline{c}) = 60^0$. Найти $(\overline{a} + 2\overline{b} - 3\overline{c})^2$.

3. Вычислить проекцию вектора $\overline{a} = (3, 2, 1)$ на ось вектора $\overline{AB}$, если $A(2, -2, 0)$ и $B(-2, 2, 2)$.

4. Дано: $|\overline{a}| = 4$, $|\overline{b}| = 10$. При каком α векторы $\overline{a} + \alpha\overline{b}$ и $\overline{a} - \alpha\overline{b}$ будут взаимно перпендикулярны?

5. При каком α векторы $\overline{p} = \alpha\overline{a} + 5\overline{b}$ и $\overline{q} = 3\overline{a} - \overline{b}$ будут коллинеарны, если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ не коллинеарны

Вариант 4.

1. Разложить вектор $\overline{C} = (1, 8)$ по векторам $\overline{a} = (5, 3)$ и $\overline{b} = (1, -1)$.

2. Дано: $|\overline{a}| = 2$, $|\overline{b}| = 1$, $|\overline{c}| = 8$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b}) = 90^0$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{c}) = (\overline{b}\hat{\ }\overline{c}) = 60^0$.

   Найти $(\overline{a} + 2\overline{b} - 3\overline{c})^2$.

3. Вычислить проекцию вектора $\overline{a} = (1, 2, 3)$ на ось вектора $\overline{AB}$,если $A(-3, 1, 4)$ и $B(3, 3, 1)$.

4. Дано: $|\overline{a}| = 4$, $|\overline{b}| = 1$. При каком α векторы $\overline{a} + \alpha\overline{b}$ и $\overline{a} - \alpha\overline{b}$ будут взаимно перпендикулярны?

5. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах

   $3\overline{a} - 2\overline{b}$ и $2\overline{a} + 3\overline{b}$, если $|\overline{a}| = 2$, $|\overline{b}| = 5$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b}) = 30^0$.

Вариант 5.

1. Разложить вектор $\overline{C} = (0, 9)$ по векторам $\overline{a} = (5, 4)$ и $\overline{b} = (1, -1)$.

2. Дано: $|\overline{a}| = 1$, $|\overline{b}| = 4$, $|\overline{c}| = 2$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{c}) = 90^0$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b}) = (\overline{b}\hat{\ }\overline{c}) = 60^0$.Найти $(\overline{a} - \overline{b})\cdot(3\overline{a} + \overline{c})$.

3. Вычислить проекцию вектора $\overline{a} = (-1, 2, -3)$ на ось вектора $\overline{AB}$, если $A(5, -5, 5)$ и

$B(5, 3, 1)$.

4. Вычислить косинус угла, образованного векторами $\overline{a} = (2, -4, 4)$ и $\overline{b} = (-3, 2, 6)$.

5. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах

   $2\overline{a} - \overline{b}$ и $2\overline{a} + \overline{b}$, если $\overline{a} = (3, -2, -2)$ и $\overline{b} = (1, -2, -1)$.

4. Необходимое оборудование

5. Критерии оценки

5 – все задания выполнены верно. Решения подробно расписаны, получены правильные ответы.
4 – выполнено верно более 75 процентов заданий. Должны быть приведены подробные решения примеров.
3 - правильно или с небольшими неточностями выполнено более 50 процентов самостоятельной работы. Помимо ответов обязательно наличие решения примеров.
2 - правильно выполнено менее 50 процентов самостоятельной работы.

6. Пояснения к работе:
Образец выполнения самостоятельной работы:

1. Разложить вектор $\overline{\mathrm{C}} = \{2, 0\}$ по векторам $\overline{\mathrm{a}} = \{1,1\}$ и $\overline{\mathrm{b}} = \{1,-1\}$

2. Найти длину вектора $\overline{p} + 2\overline{q}$, если $\overline{p} = \overline{a} - \overline{b}$, $\overline{q} = \overline{a} + 2\overline{b}$, $|\overline{a}| = 1$;

   $|\overline{b}| = 3$; $\overline{a}\wedge\overline{b} = \frac{2}{3}\pi$.

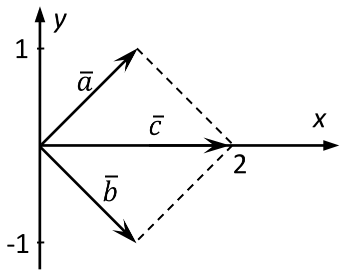
3. Найти вектор $\overline{\mathrm{x}}$, коллинеарный вектору $\overline{a} = \{2, 1, -2\}$ и удовлетворяющий условию $(\overline{x} \cdot \overline{a}) = 27$.

4. Вычислить угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\overline{p} = 2\overline{a} + \overline{b} - \overline{c}$ и $\overline{q} = \overline{a} - 3\overline{b} + \overline{c}$, где $\overline{a}; \overline{b}; \overline{c} -$ единичные взаимно перпендикулярные векторы (косинус угла).

5. Найти вектор $\overline{\mathrm{x}}$, перпендикулярный векторам $\overline{a} = \{1, 1, 1\}$ и $\overline{b} = \{2, 0, 1\}$ и образующий с осью OX тупой угол, если $|\overline{x}| = \sqrt{6}$.

<u>I. Решение</u>

Разложить вектор $\overline{c}$ по векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – это значит представить $\overline{\mathrm{c}}$ в виде $\mathrm{c} = \alpha \cdot \overline{a} + \beta \cdot \overline{b}$, где α и β пока неизвестные числа. Переходя к координатам, получим: $2\overline{i} + 0\overline{j} = (\alpha + \beta)\overline{i} + (\alpha - \beta)\overline{j}$.



В результате приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases},$$

решением которой являются $\alpha = 1$ и $\beta = 1$. Отсюда $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$.

Ответ: $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$

2. Решение

Как известно, модуль вектора равен корню квадратному из скалярного квадрата этого вектора $|\overline{p}+2\overline{q}| = \sqrt{(\overline{p}+2\overline{q})^2}$. Находим скалярный квадрат $(\overline{p}+2\overline{q})^2 = \left(\overline{a}-\overline{b}+2\overline{a}+4\overline{b}\right)^2 = \left(3\overline{a}+3\overline{b}\right)^2 = 9(\overline{a}^2+2\overline{a}\overline{b}+\overline{b}^2) =$

$= 9\left(1+2*3*cos\frac{2}{3}\pi+9\right) = 63$. Отсюда $\left|\overline{p}+2\overline{q}\right| = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$.

Ответ: $3\sqrt{7}$

3. Решение

В силу коллинеарности вектор $\overline{x}$ можно представить в виде $\overline{x} = \lambda\overline{a}$, где λ – пока неизвестный множитель. Для его определения используем второй пункт условия $(\overline{x}\cdot\overline{a}) = \lambda\overline{a}^2 = \lambda(4+1+4) = 9\lambda = 27$. Отсюда $\lambda = 3$ и $\overline{x} = 3\overline{a} = \{6,3,-6\}$.

Ответ: $\overline{x} = \{6,3,-6\}$

4. Решение

Известно, что диагонали параллелограмма можно найти

$$\overline{d}1 = \overline{p}+\overline{q} = 3\overline{a}-2\overline{b}+0\overline{c}$$

$$\overline{d}2 = \overline{p}-\overline{q} = \overline{a}+4\overline{b}-2\overline{c}$$

т.к. векторы $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ представляют собой единичные взаимно перпендику-лярные вектора, то *их* можно считать координатным базисом, тогда для нахождения требуемого угла воспользуемся формулой

$$cos(\overline{d}_1\hat{}\,\overline{d}_2) = \frac{\overline{d}1*\overline{d}2}{|\overline{d}1|*|\overline{d}2|} = \frac{3*1+(-2)*4+0*(-2)}{\sqrt{3^2+1^2}*\sqrt{1^2+4^2+2^2}} = \frac{-5}{\sqrt{13}*\sqrt{21}} = \frac{-5}{\sqrt{273}}$$

Ответ: $\frac{-5}{\sqrt{273}}$

5. Решение

Найдем вектор $\overline{c}\perp\overline{a}, \overline{c}\perp\overline{b}$, следовательно,

$$\overline{c} = [[\overline{a},\overline{b}]] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \overline{i}+\overline{j}-2\overline{k}$$

Поскольку вектор $\overline{x}$ перпендикулярен векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$, то он коллинеарен вектору $\overline{c}$. Следовательно, $\overline{x} = \lambda*\overline{c} = \{\lambda,\lambda,-2\lambda\}$.

Так как $|\overline{x}| = \sqrt{\lambda^2+\lambda^2+4\lambda^2} = \sqrt{6}|\lambda| = \sqrt{6}$, то $\lambda = \pm 1$. Вектор $\overline{x}$ образует тупой угол с осью OX, поэтому его проекция (координата) на эту ось должна быть отрицательной, отсюда $\lambda = -1$ и $\overline{x} = -\overline{c} = \{-1,-1,2\}$.

Ответ: $\overline{x} = \{-1,-1,2\}$

Самостоятельная работа № 3

Тема: Вычисление пределов с помощью замечательных пределов, раскрытие неопределённостей

1. **Цели работы**:
– развитие общих компетенций;
– формирование умений работы с информацией;
– формирование понимания темы;
– формирование умения анализировать;
– закрепление понятий теории пределов;
– формирование умения вычислять пределы функций.

2. **Задача:** Решить примеры.
3. **Подготовка к работе и порядок выполнения работы:**
- изучить представленный материал;
- на основе изученного материала выполнить задания

Варианты самостоятельной работы

I. Найти пределы функции.

Вариант 1

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-1}{x^2+x-1};$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-3x^3-x^2}{x^2-1};$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x^2-1)x^4}{x+1-6x^6};$
4. $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{5}}\dfrac{15x^2-2x-1}{5x^2-4x-1};$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{3x};$
6. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{1}{\ln 2-x}};$
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\operatorname{tg}^2 6x};$
8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\arcsin 3x};$
9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+2}{2x+1}\right)^x.$

Вариант 2

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+4}{x^4-3x^2-4}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+3x^2}{4-2x^2};$
3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2+4x-5};$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(x+1)(2x^3-1)}{x^{10}+5};$
5. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{26+x}-5}{x^2-25};$
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{15x+2}{15x-3}\right)^{x-3};$
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\operatorname{tg} 2x};$
8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 3x}{\ln(1+x^2)};$
9. $\lim\limits_{x\to 3}(4-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}}.$

Вариант 3

1. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{x+2}{\sin \pi x}$;

2. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{5x^2-24x-5}{x^3-3x^2-10x}$;

3. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-2x-15}$;

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x+5}$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3(x-1)(5-2x)}{1-x+5x^3}$;

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\operatorname{tg} 5x}$;

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+9}\right)^{x+2}$;

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\cdot\sin 5x}$;

9. $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{1}{\sqrt{x-1}}}$.

Вариант 4

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+3x+4}{x+2}$;

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x+2}$;

3. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}$;

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x-2}{4x^2+2x+7}$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-1+2x}{x+2x^3-10x^5}$;

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\cdot\sin 10x}$;

7. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$;

8. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\operatorname{arctg}(x-3)}{x^2-9}$;

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{-4x}$.

4. Необходимое оборудование

5. Критерии оценки

5 – все задания выполнены верно. Решения подробно расписаны, получены правильные ответы.
4 – выполнено верно более 75 процентов заданий. Должны быть приведены подробные решения примеров.
3 - правильно или с небольшими неточностями выполнено более 50 процентов самостоятельной работы. Помимо ответов обязательно наличие решения примеров.
2 - правильно выполнено менее 50 процентов самостоятельной работы.

6. Пояснения к работе:

Для выполнения работы потребуются следующие сведения из теории пределов:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ \varphi(x)\to 0}} \frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)} = 1, \qquad \lim_{\substack{x\to a\\ \varphi(x)\to 0}} \left(1+\varphi(x)\right)^{\frac{1}{\varphi(x)}} = e,$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^\alpha + a_1x^{\alpha-1}+\ldots}{b_0x^\beta + b_1x^{\beta-1}+\ldots} = \begin{cases} \infty, & \alpha>\beta, \\ 0, & \alpha<\beta, \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \alpha=\beta, \end{cases}$$

Эквивалентности: $x\to a,\ \varphi(x)\to 0$.

$\sin\varphi(x) \sim \varphi(x)$, $\qquad e^{\varphi(x)} - 1 \sim \varphi(x)$,

$\operatorname{tg}\varphi(x) \sim \varphi(x)$, $\qquad a^{\varphi(x)} - 1 \sim \varphi(x)\cdot\ln a$,

$1-\cos\varphi(x) \sim \frac{1}{2}\varphi(x)^2$, $\qquad \ln(1+\varphi(x)) \sim \varphi(x)$,

$\arcsin\varphi(x) \sim \varphi(x)$, $\qquad \log_a\left(1+\varphi(x)\right) \sim \frac{1}{\ln a}\varphi(x)$,

$\operatorname{arctg}\varphi(x) \sim \varphi(x)$, $\qquad \left(1+\varphi(x)\right)^m - 1 \sim m\,\varphi(x)$.

Самостоятельная работа № 4
Тема: Нахождение производной сложной функции.

1. Цель:
- развитие общих компетенций;
- формирование умений работы с информацией;
- формирование понимания темы;
- формирование умения анализировать;
- закрепление правил дифференцирования;
- освоение методов дифференцирования сложных функций.

2.Задача: Решить примеры.

4. Подготовка к работе и порядок выполнения работы:
- изучить представленный материал;
- на основе изученного материала выполнить задания

Задания для самостоятельной работы:

Найти производные функций:

1) $y = x^2 + 4x + 3$; $y = x^6 - 3x + 8$;
2) $y = \frac{6}{x} + 2\sqrt{x}$; $y = 4\sqrt{x} - \frac{2}{x}$
3) $y = \frac{x^6-4x+1}{x}$; $y = \frac{x^5-3x^2+2}{x}$;

4) $y = \frac{3x-4}{3}; y = \frac{8-6x}{5};$
5) $y = \frac{3x-4}{7-2x};\ y = \frac{5x+2}{x-3}$
6) $y = 3sin2x; y = 5cos3x;$
7) $y = \sqrt{x^2 - 4x}; y = \sqrt{3x - x^2};$
8) $y = (3 + 2x)(2x - 3), y'(0{,}25) - ?\ \ y = (x^2 - 3)(x^2 + 3), y'(\frac{1}{2}) - ?$

1) $y = \log_7 \cos\sqrt{1 + x};$

2) $y = arctge^{2x} + \ln\sqrt{\frac{1+e^{2x}}{e^{2x}-1}};$

3) $y = \ln\sin tge^{-\frac{x}{2}};$

4) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}};$

5) $y = \sin cos^2 tg^3 x$

6) $y = \sqrt{5x^2 + 1}$

7) $y = \ln(\sin x + \cos x)$

8) $y = arctg\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)$

9) $y = \sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}}$

10) $y = \ln\sqrt{\frac{e^{4x}}{e^{4x}+1}}$

4. Необходимое оборудование

5. Критерии оценки

5 – все задания выполнены верно. Решения подробно расписаны, получены правильные ответы.
4 – выполнено верно более 75 процентов заданий. Должны быть приведены подробные решения примеров.
3 - правильно или с небольшими неточностями выполнено более 50 процентов самостоятельной работы. Помимо ответов обязательно наличие решения примеров.
2 - правильно выполнено менее 50 процентов самостоятельной работы.

6. Пояснения к работе:

Нахождение производной называется **дифференцированием.**

Пусть *y=y(u) и u=u(x)* –дифференцируемые функции, тогда **сложная** функция $y = y[u(x)]$ есть так же дифференцируемая функция , причём

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \qquad \text{, или} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Это правило распространяется на цепочку из любого конечного числа дифференцируемых функций: **производная сложной функции равна произведению производных функций, её составляющих.**

Правила дифференцирования

1. $(\mathrm{cu})' = c \cdot (u)'$, c – const,
2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
3. $(uv)' = u'v + uv'$
4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Таблица производных элементарных функций

$(\tilde{n})' = 0$, c - $const$	$(a^x)' = a^x \ln a$
$(cx)' = c$	$(e^x)' = e^x$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
$(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Самостоятельная работа № 5
Тема: Замена переменной и интегрирование по частям.

1. **Цель:**

– развитие общих компетенций;
– формирование умений работы с информацией;
– формирование понимания темы;
– формирование умения анализировать;
– закрепление правил интегрирования;
– освоение методов замены переменной и интегрирования по частям.

2. **Задача:** Решить примеры.

3. **Подготовка к работе и порядок выполнения работы:**

- изучить представленный материал;
- на основе изученного материала выполнить задания

Задачи и практические задания:

Базовый уровень сложности

1. Найти интегралы методом замены переменной:
   1) $\int \frac{x\,dx}{x^2+9}$;
   2) $\int xe^{-x^2}\,dx$;
   3) $\int \frac{3x^2\,dx}{(1-5x^3)^3}$;
   4) $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{cos^2x}}\,dx$;
   5) $\int \frac{tgx+1}{cos^2x}\,dx$;
   6) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$;
   7) $\int \frac{arctgx}{1+x^2}\,dx$.
2. Найти интегралы методом интегрирования по частям:
   1) $\int x\, arctgx\, dx$;
   2) $\int x\ln(3x+2)\,dx$;
   3) $\int (4x^3+6x-7)\ln x\,dx$;
   4) $\int xe^{5x}\,dx$;

5) $\int x\cos x\,dx$;

6) $\int e^x \sin x\,dx$;

7) $\int \frac{x\,dx}{cos^2x}$;

8) $\int ln^2x\,dx$

4. **Необходимое оборудование**

5. **Критерии оценки**

5 – все задания выполнены верно. Решения подробно расписаны, получены правильные ответы.
4 – выполнено верно более 75 процентов заданий. Должны быть приведены подробные решения примеров.
3 - правильно или с небольшими неточностями выполнено более 50 процентов самостоятельной работы. Помимо ответов обязательно наличие решения примеров.
2 - правильно выполнено менее 50 процентов самостоятельной работы.

6. **Пояснения к работе:**

Образец выполнения самостоятельной работы:

I. Вычислить интегралы:

1. $\int \boldsymbol{x^2 \sin(1-x^3)\,dx}$
2. $\int \boldsymbol{\frac{dx}{3x-2}}$
3. $\int \boldsymbol{sin2x \cdot cos3x\,dx}$
4. $\int \boldsymbol{\frac{dx}{x^2+2x+5}}$
5. $\int \boldsymbol{arctg\sqrt{x}\,dx}$ 5.

Решение

1. $\int x^2\sin(1-x^3)\,dx =$

известно, что $d\,(x^3) = 3x^2dx$, тогда

$\frac{1}{3}\int \sin(1-x^3)\,dx^3 =$

имеем свойство дифференциала $\frac{1}{a}d\,(ax+b) = dx$

т.е. $-d(1-x^3) = dx^3$

$-\frac{1}{3}\int \sin(1-x^3)\,d(1-x^3) = -\frac{1}{3}(-\cos(1-x^3)) + c = \frac{1}{3}\cos(1-x^3) + c$

2. $\int \frac{dx}{3x-2} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x-2)}{3x-2} = \frac{1}{3}\ln|3x-2| + c$

3. $\int sin2x \cdot cos3x\, dx\ =$

имеем формулу $\sin\alpha \cdot cos\beta\ =\ \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$, тогда
$\frac{1}{2}\int\ [sin5x+\sin(-x)]\,dx\ =\ \frac{1}{2}\int sin5xdx\ -\frac{1}{2}\int sinxdx\ =$
$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\int sin5xdx - \frac{1}{2}(-cosx) = -\frac{2}{10}cos5x + \frac{1}{2}cosx + c$

4. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}\ =$

выделим полный квадрат в знаменателе
$x^2+2x+5 =\ x^2+2x+1^2+4 = (x+1)^2+4$
$\int \frac{dx}{(x+1)^2+4}\ =\ \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2^2}\ =\ \frac{1}{2}arctg\frac{x+1}{2}\ \ +c$

5. $\int arctg\sqrt{x}\,dx\ \ =$

воспользуемся формулой интегрирования по частям
$\int U\cdot dV = U\cdot V - \int V\cdot dU$
Пусть $U = arctg\sqrt{x}\ \ \rightarrow\ \ dU =\ \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$
$dV = dx\ \ \rightarrow\ \ V{=}x$
Имеем:
$$xarctg\sqrt{x} - \int\frac{x}{(1+x)2\sqrt{x}}dx$$
посчитаем получившийся интеграл $\int\frac{x}{(1+x)2\sqrt{x}}dx\ =\ \int\frac{(\sqrt{x})^2}{\left(1+(\sqrt{x})^2\right)2\sqrt{x}}dx =$
$\int\frac{(\sqrt{x})^2}{1+(\sqrt{x})^2}d(\sqrt{x})$, замена $\sqrt{x} = t$

$\int\frac{t^2}{1+t^2}dt\ =\ \int\frac{(t^2+1)-1}{t^2+1}dt\ =\ \int\frac{t^2+1}{t^2+1}dt\ -\ \int\frac{dt}{t^2+1}\ =\ \int dt\ -\ \int\frac{dt}{t^2+1}\ =\ t\ -$
$arctgt\ =\ \sqrt{x}\ -\ arctg\sqrt{x}$
Получаем: $\int arctg\sqrt{x}\,dx\ =\ x\,arctg\sqrt{x}\ -\ \sqrt{x}\ +\ arctg\sqrt{x}\ +\ c$

Самостоятельная работа № 6

Тема: ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ

1. **Цель:**

- развитие общих компетенций;
- формирование умений работы с информацией;
- формирование понимания темы;
- формирование умения анализировать;
- закрепление понятия сходимости ряда;
- освоение методов исследования рядов на сходимость..

2. **Задача:** Решить примеры.

3. **Подготовка к работе и порядок выполнения работы:**
   - изучить представленный материал;
   - на основе изученного материала выполнить задания

Задачи и практические задания:

Вариант 1.

1. Написать три первых и a_{n+1} члена ряда:

$$a_n = \frac{5n+3}{(n+1)!}$$

2. Исследовать сходимость рядов:

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot arctg\frac{1}{n^2}$

2.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^2}$

2.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$

2.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$

2.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{5^n}$

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость.

3.1. $\frac{1}{2^2} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{4^2} - ... + (-1)^{n+1}\frac{n}{(n+1)^2} + ...$

3.2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2n-1}$.

4. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-3)^n}{(n+1)4^n}$$

Вариант 2.

1. Написать три первых и a_{n+1} члена ряда: $a_n = \frac{n+1}{(n+2)(n^2+1)}$

2. Исследовать сходимость рядов:

2.1. $\frac{1}{4}+\frac{2}{7}+\frac{3}{10}+...+\frac{n}{3n+1}+...$

2.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+1}$

2.3. $\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}+...+\frac{1}{(2n+1)!}+...$

2.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+4}$

2.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin^n\frac{1}{n}$

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость

3.1. $\frac{1}{2^2}-\frac{2}{3^2}+\frac{3}{4^2}-...+(-1)^{n+1}\frac{n}{(n+1)^2}+...$

3.2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2n-1}$.

4. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-2)^n}{(n+1)4^n}$$

Вариант 3.

1. Написать три первых и a_{n+1} члена ряда:

$$a_n=\frac{(-1)^n(6-5n)}{2^n(n+1)}$$

2. Исследовать сходимость рядов:

2.1. $\frac{1}{11}+\frac{2}{21}+\frac{3}{31}+...+\frac{n}{10n+1}+...$

2.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+5}$

2.3. $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+...+\frac{n}{2^n}+...$

2.4. $\dfrac{1}{\ln 2}+\dfrac{1}{\ln^2 3}+\dfrac{1}{\ln^3 4}+\ldots+\dfrac{1}{\ln^n(n+1)}+\ldots$

2.5. $\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{3n-2}}+\ldots$

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость

3.1. $1-\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{3^3}-\ldots+(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n^3}+\ldots$

3.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n+1}{n}$.

4. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-2)^3(x+3)^{2n}}{2n+3}$$

Вариант 4.

1. Написать три первых и a_{n+1} члена ряда:

$$a_n=\frac{(-1)^{n+1}(3n-2)}{n(n+2)}$$

2. Исследовать сходимость рядов:

2.1. $1\cdot\arcsin 1+2\cdot\arcsin\dfrac{1}{2}+\ldots+n\cdot\arcsin\dfrac{1}{n}+\ldots$

2.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{10n-1}$

2.3. $\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{5!}+\dfrac{1}{7!}+\ldots+\dfrac{1}{(2n+1)!}+\ldots$

2.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^2+2}$

2.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}arctg^n\,\dfrac{1}{n}$

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость

3.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\ln^n 10}$

3.2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3^n}{(n+1)!}$.

4. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n\cdot 9^n},$$

Вариант 5.

1. Написать три первых и a_{n+1} члена ряда:

$$a_n=\frac{3n+1}{\left[3+(-1)^n\right]^n}$$

2. Исследовать сходимость рядов:

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot arctg\frac{1}{2n}$

2.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$

2.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{4^n}$

2.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^n$

2.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}$

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость

3.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}$

3.2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n}{3n^2+5}$.

4. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(3n+1)\cdot 2^n},$$

4. Необходимое оборудование

5. Критерии оценки

5 – все задания выполнены верно. Решения подробно расписаны, получены правильные ответы.
4 – выполнено верно более 75 процентов заданий. Должны быть приведены подробные решения примеров.
3 - правильно или с небольшими неточностями выполнено более 50 процентов самостоятельной работы. Помимо ответов обязательно наличие решения примеров.
2 - правильно выполнено менее 50 процентов самостоятельной работы.

6. Пояснения к работе:

Радикальный признак Коши

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - ряд с положительными членами, если $\exists C = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$, тогда:

(1) C<1, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится;

(2) C>1, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - расходится.

(3) C=1, то ряд может как сходиться, так и расходиться.

Признак Даламбера

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - ряд с положительными членами, если $\exists D = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, тогда:

(1) D<1, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится;

(2) D>1, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - расходится;

(3) D=1, то ряд может как сходиться, так и расходиться.

Признак Лейбница

Пусть $a_n > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ - знакочередующийся ряд.

Если последовательность $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,**монотонно убывая,** стремится к нулю, то этот ряд сходится.

Самостоятельная работа № 7

Тема: Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

1. **Цель:**

– развитие общих компетенций;
– формирование умений работы с информацией;
– формирование понимания темы;
– формирование умения анализировать;
– закрепление понятия дифференциального уравнения;
– освоение решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

2. **Задача:** Решить примеры.

3. **Подготовка к работе и порядок выполнения работы:**

- изучить представленный материал;
- на основе изученного материала выполнить задания

Задачи и практические задания:

Найти общее решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными:

1) $y' = y$;

2) $3y' = \frac{1+x^2}{y^2}$;

3) $(x^2+1)\,dy - xy\,dx = 0$;

4) $\sqrt{y}\,dx + x^2\,dy = 0$;

5) $e^y(1+x^2)\,dy - 2x(1+e^y)\,dx = 0$;

6) $y\cos x\,dx - sin^5 x\,dy = 0$;

7) $y^2e^{3x}y' + (1+e^{3x})\left(\sqrt{y}+1\right) = 0$.

4. **Необходимое оборудование**

5. **Критерии оценки**

5 – все задания выполнены верно. Решения подробно расписаны, получены правильные ответы.
4 – выполнено верно более 75 процентов заданий. Должны быть приведены подробные решения примеров.
3 - правильно или с небольшими неточностями выполнено более 50 процентов самостоятельной работы. Помимо ответов обязательно наличие решения примеров.
2 - правильно выполнено менее 50 процентов самостоятельной работы.

6. **Пояснения к работе:**

ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

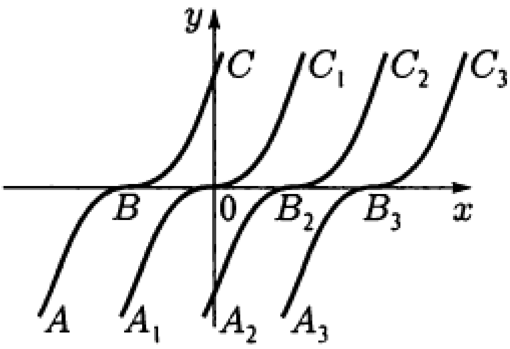
«Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными»

Пример 1. Найти общее и частное решение $y' = 3\sqrt[3]{y^2}, y(1) = 1$.

Заменяем $y' = \frac{dy}{dx}$. Умножаем обе части уравнения на dx. и интегрируем полученное уравнение $\frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} dy = dx \Rightarrow y^{\frac{1}{3}} = x + C \Rightarrow y = (x + C)^{\frac{1}{3}}$ - общее решение.

Подставим в общее решение начальные условия и найдем C_0 и частное решение.

$1 = (1 + C)^3 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow y = x^3$ - частное решение.



Пример 2. Найти общее и частное решение $y' = -\frac{x}{y}, M_0(3,4)$.

Заменяем у' отношением dy/dx. Умножаем обе части уравнения на dx.

$dy = -\frac{x}{y} dx$. Умножаем на «стоящую не у своего дифференциала» функцию у. и интегрируем полученное уравнение $ydy = -xdx \Rightarrow y^2 + x^2 = C^2$ - общее решение.
Подставим в него M_0 и получим частное решение. $3^2 + (-4)^2 = C^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 25$ - частное решение.

Пример 3. Найти общее и частное решение $y' = -\frac{y}{x}, y(2) = 3$.

Заменяем у' отношением dy/dx. Умножаем обе части уравнения на dx.

$dy = -\frac{y}{x} dx$. Делим на «стоящую не у своего дифференциала» функцию у и интегрируем полученное уравнение $\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0 \Rightarrow \ln|y| + \ln|x| = \ln C \Rightarrow xy = C$ - общее решение.

$6 = C \Rightarrow xy = 6-$ частное решение.

Отметим, что постоянную интегрирования в выражение для общего решения можно вводить в произвольном виде так, как это удобно в конкретной ситуации, например, C,C/3, lnC, √C, cosC.

Самостоятельная работа № 8

Тема: РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕОРЕМ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. **Цель:**

– развитие общих компетенций;
– формирование умений работы с информацией;
– формирование понимания темы;
– формирование умения анализировать;
– закрепление основных понятий теории вероятностей;
– освоение вычисления вероятностей событий.

2. **Задача:** Решить примеры и задачи.

3. **Подготовка к работе и порядок выполнения работы:**
- изучить представленный материал;
- на основе изученного материала выполнить задания.

Задачи и практические задания:

1. Игральная кость бросается дважды. Найдите:
   1) Вероятности событий $A \cup B, A \cap B, A \cap \overline{B}$, если А- «сумма выпавших очков чётна», В- «выпадет хотя бы одна единица»;

   2) Вероятность того, что, по крайней мере, один раз выпадет меньше трёх очков.

2. Завод в среднем даёт 27% продукции высшего сорта и 70% первого сорта. Найти вероятность того, что наудачу взятое изделие будет или высшего, или первого сорта.

3. Стрелок попал в мишень, разделённую на три непересекающиеся части. Вероятность попадания в первую часть равна 0,45, во вторую- 0,35. Найти вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадёт:

   1) Либо в первую, либо во вторую часть;
   2) В третью часть.

4. Из ящика, содержащего 15 красных и 5 синих шаров, наудачу выбирают 4 шара. Найти вероятность того, что среди выбранных шаров:
   1) Не более одного синего;
   2) Не менее трёх красных;
   3) Не менее половины красных.

5. Электрические лампочки производятся на одной автоматической линии. В среднем одна лампочка из тысячи оказывается бракованной. Лампочки изготовляются независимо друг от друга. Чему равна вероятность того, что из двух взятых наугад лампочек:
   1) Окажутся неисправными обе;
   2) Исправной будет только одна;
   3) Обе будут бракованными.

4. Необходимое оборудование

5. Критерии оценки

5 – все задания выполнены верно. Решения подробно расписаны, получены правильные ответы.
4 – выполнено верно более 75 процентов заданий. Должны быть приведены подробные решения примеров.
3 - правильно или с небольшими неточностями выполнено более 50 процентов самостоятельной работы. Помимо ответов обязательно наличие решения примеров.
2 - правильно выполнено менее 50 процентов самостоятельной работы.

6. Пояснения к работе:

Суммой (объединением) нескольких событий называют событие, которое состоит в появлении хотя бы одного из этих событий.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий.

Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Следствие.

Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий.

Теорема сложения вероятностей совместных событий.

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

Теорема может быть обобщена на любое конечное число совместных событий.

Теорема умножения вероятностей.

Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)$$

В частности, для независимых событий:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Формула полной вероятности.

Теорема. Вероятность события А , которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $B_1; B_2; ...; B_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события А:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + ... + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)$$

Список источников литературы и иных источников:

1. Бардушкин, В.В. Элементы высшей математики: учебник для студ. учрежд. СПО: в 2 т. / В.В. Бардушкин, А.А. Прокофьев. - Москва: КУРС: ИНФРА-М, 2021.
2. Богомолов, Н.В. Математика: учебник для студ. учрежд. СПО/Н.В.Богомолов. - Москва: Юрайт, 2020.
3. Дадаян, А.А. Математика: учебник для студ. учрежд. СПО/А.А.Дадаян. - 3-е изд. - Москва: ИНФРА-М, 2021.
4. Шипачёв, В.С. Высшая математика: учебник/В.С.Шипачев. - Москва: ИНФРА-М, 2021.
5. Элементы линейной алгебры: учебник и практикум для студ. учрежд. СПО/под ред. Н.Ш.Кремера. – Москва: Юрайт, 2020.
6. Кочетков, Е.С. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для студ. учреждений СПО/ Е.С.Кочетков, С.О.Смерчинская, В.В.Соколов. - 2-е изд., испр. и перераб. - Москва: Форум: ИНФРА-М, 2021.
7. Гусева, А.И. Дискретная математика: сборник задач: учебное пособие для студ. учрежд. СПО/А.И.Гусева, В.С.Киреев, А.Н.Тихомирова. - Москва: КУРС: ИНФРА-М, 2021.

Электронные ресурсы:

8. Exponenta.ru**:** [сайт]**.** - URL**:** http://www.exponenta.ru/.
9. MATH24.ru. Математический анализ: [сайт]. - URL: http://www.math24.ru/.
10. Математический портал. Практические занятия по высшей математике: [сайт]. - URL: http://mathportal.net/.