**МИНИСТЕРСТВО ЦИФРОВОГО РАЗВИТИЯ,
СВЯЗИ И МАССОВЫХ КОММУНИКАЦИЙ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ ИМ. ПРОФ. М.А. БОНЧ-БРУЕВИЧА»
(СПбГУТ)**

Санкт-Петербургский колледж телекоммуникаций им. Э.Т. Кренкеля

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора
по учебной работе
_________ Н.В. Калинина
17 марта 2022 г

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

по учебной дисциплине
ЕН.01. МАТЕМАТИКА

по специальности
10.02.04 Обеспечение информационной безопасности телекоммуникационных систем

среднего профессионального образования

Санкт-Петербург
2022

ЕН.01. Математика. Методические указания по выполнению практических работ. Составил А.А.Обудовская. – Санкт-Петербург, 2022.

Методические указания содержат описания практических занятий, предусмотренных рабочей программой **ЕН.01. Математика**. Каждая работа рассчитана на 2-4 академических часа, общий объём составляет 22 часа. Нумерация рисунков, формул и таблиц в пределах одной работы. Методические указания предназначены для обучающихся очной формы обучения по специальности 10.02.04 Обеспечение информационной безопасности телекоммуникационных систем.

Рассмотрено и одобрено предметной (цикловой) комиссией математических и естественно-научных дисциплин Санкт-Петербургского колледжа телекоммуникаций им. Э.Т. Кренкеля.

СОДЕРЖАНИЕ

Практическое занятие 1

ДЕЙСТВИЯ С МАТРИЦАМИ. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ 2-ГО,3-ГО ПОРЯДКОВ. НАХОЖДЕНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ, РАНГА МАТРИЦЫ.

Цель практического занятия: В соответствии с рабочей программой по дисциплине «Математика» в результате изучения обязательной части цикла обучающийся должен:

уметь:

- выполнять действия над матрицами, вычислять определители разных видов;

знать:

- основные свойства определителей и матриц;
- основные методы вычисления определителей.

Таким образом, студент во время проведения Практического занятия и самостоятельной работы по теме должен:

а) приобрести понятия и знания основных методов линейной алгебры,

б) приобрести умения применять методы нахождения и использования матриц и определителей.

1. Краткие сведения из теории

1) Понятие матрицы

Матрицей размера $m\times n$ называется прямоугольная таблица из чисел $\grave{a}_{ij}$, $i=1,2,...,m$, $j=1,2,...,n$,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix},$$ состоящая из m строк и n столбцов,

где a_{ij} – элемент матрицы;

i- номер строки;

j – номер столбца.

Если число строк матрицы равно числу столбцов, матрица называется квадратной

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратной матрицей третьего порядка называется таблица чисел:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица A называется вырожденной (особенной), если ее определитель

$$\Delta \grave{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Если $\Delta \grave{A} \neq 0$, то матрица называется невырожденной (неособенной).

Матрица называется симметрической, если элементы квадратной матрицы удовлетворяют условию $a_{mn} = a_{nm}$.

Две матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

считаются равными (A = B) тогда и только тогда, когда равны их соответственные элементы, то есть когда $a_{mn} = b_{mn}$

(m, n = 1, 2, 3) .

2) Действия над матрицами

Суммой двух матриц A и B называется матрица, определяемая равенством

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+a_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}.$$

Произведением числа m на матрицу A называется матрица, определяемая равенством

$$m\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma_{11} & ma_{12} & ma_{13} \\ ma_{21} & ma_{22} & ma_{23} \\ ma_{31} & ma_{32} & ma_{33} \end{pmatrix}.$$

Произведение двух матриц A и B называется матрица, определяемая равенством

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j3} \\ \sum_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j3} \\ \sum_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j3} \end{pmatrix}.$$

По отношению к произведению двух матриц переместительный закон не выполняется AB ≠ BA.

Нулевой матрицей называется матрица, все элементы которой равны нулю:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 .$$

Сумма этой матрицы и любой матрицы А дает матрицу А: А + 0 = А.

Единичной матрицей называется квадратная матрица вида

$$\text{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При умножении этой матрицы слева и справа на матрицу А получается матрица А:

ЕА = АЕ = А.

Матрицей – столбцом называется матрица $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Произведение АХ определяется равенством

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + & a_{32}x_2 + & a_{33}x_3 \end{pmatrix} .$$

3) Понятие определителя

Определителем второго порядка, соответствующим таблице элементов $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, называется

число Δ, которое определяется равенством $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Диагональ, на которой находятся элементы a_{11} и a_{22}, называется главной, а диагональ, на которой находятся элементы a_{21} и a_{12} – побочной.

Определитель третьего порядка, соответствующий таблице элементов

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, определяется равенством

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

(разложение определителя третьего порядка по элементам первой строки).

Минором M_{ik}элемента a_{ik}определителя третьего порядка называется определитель второго порядка, который получится, если в исходном определителе вычеркнуть строку и столбец, содержащие данный элемент.

Алгебраическим дополнением A_{ik} элемента a_{ik}определителя третьего порядка называется его минор, умноженный на $(-1)^n$, где n – сумма номеров строки и столбца,

Т. о., знак, который при этом приписывается минору соответствующего элемента, определяется следующей таблицей: $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$. $A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot M_{ik}$.

4) Основные свойства определителей

- Величина определителя не изменится, если все его строки заменить на столбцы с теми же номерами, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} .$$

- При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет свой знак; например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} .$$

- Общий множитель всех элементов какой-либо строки (столбца) определителя можно вынести за знак определителя; например

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} .$$

- Если некоторые строки (столбцы) определителя целиком состоят из нулей, то определитель равен нулю.
- Если элементы какой-либо строки (столбца) определителя пропорциональны (в частности, равны) соответствующим элементам другой строки (столбца), то определитель равен нулю; например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

- Если каждый элемент какой-либо i-й строки (столбца) определителя есть сумма двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, отличающихся от данного определителя только i-й строкой (столбцом); i-я строка (столбец) одного из этих определителей состоит из первых слагаемых, другого определителя – из вторых слагаемых; например

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+a'_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+a'_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+a'_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a'_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a'_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

- Определитель не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на любой общий множитель; например

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31}+\lambda a_{11} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32}+\lambda a_{12} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}+\lambda a_{13} \end{vmatrix}.$$

- Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения.
- Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю; например

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = 0$$

(здесь взяты элементы первой строки и алгебраические дополнения элементов второй строки).

2. Решение типовых примеров

1) Найти значение матричного многочлена $2A^2+3A+5E$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ и E – единичная матрица третьего порядка.

Решение: вычислим почленно матричный многочлен:

возвести квадратную матрицу в квадрат – это значит, умножить её саму на себя:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1+8 & 1+3+2 & 2+1+2 \\ 1+3+4 & 1+9+1 & 2+3+1 \\ 4+1+4 & 4+3+1 & 8+1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 5 \\ 8 & 11 & 6 \\ 9 & 8 & 10 \end{pmatrix};$$

Подчеркнем, что произведение А·В имеет смысл тогда и только тогда, когда число столбцов первого сомножителя равно числу строк второго, при этом в произведении получается матрица, число строк которой равно числу строк первого сомножителя, а число столбцов равно числу столбцов второго.

$$2A^2=\begin{pmatrix}20 & 12 & 10\\ 16 & 22 & 12\\ 18 & 16 & 20\end{pmatrix};\quad 3A=\begin{pmatrix}3 & 3 & 6\\ 3 & 9 & 3\\ 12 & 3 & 3\end{pmatrix};\quad 5E=5\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix};$$

Для того чтобы сложить матрицы, необходимо сложить их соответствующие элементы:

$$2A^2+3A+5E=\begin{pmatrix}28 & 15 & 16\\ 19 & 36 & 15\\ 30 & 19 & 28\end{pmatrix}.$$

Операция сложения матриц распространяется на случай любого числа слагаемых матриц. Еще раз подчеркнем, что складывать можно только матрицы одинакового размера; для матриц разных размеров операция сложения не определена.

2) Вычислить определители второго и третьего порядков:

Напомним:
а) что определитель выгоднее раскрывать по ТОЙ строке (столбцу), где:
1) нулей побольше;
2) числа поменьше
б)свойства определителей, которые полезно знать:
1) Величина определителя не меняется при транспонировании**.**
2) Любая парная перестановка строк (столбцов) меняет знак определителя на противоположный**.**
3) Из строки (столбца) определителя можно вынести множитель (и внести его обратно)**.**
4) Если строки (столбцы) определителя пропорциональны, то он равен нулю.
Определитель с нулевой строкой (столбцом) равен нулю.

1) $\begin{vmatrix}5 & 2\\ 4 & -1\end{vmatrix}=5\cdot(-1)-4\cdot 2=-5-8=-13.$

2) $\begin{vmatrix}3 & 4 & 2\\ 1 & 5 & 2\\ 2 & 3 & 4\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}5 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}-4\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}1 & 5\\ 2 & 3\end{vmatrix}=3\cdot(20-6)-4\cdot(4-4)+2\cdot(3-10)=$

$42-0-14=28.$

3. Выполнение аудиторных заданий

Выполнить задания в соответствии с номером варианта:

1) Найти значение матричного многочлена $2A^2+3A+5E$, где Е – единичная матрица:

Номер варианта	Матрица А	Номер варианта	Матрица А

1	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & -1 \end{pmatrix}$	9	$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$	10	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	11	$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$	13	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 6 & -5 & 2 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 9 \\ 7 & 3 & -6 \\ 7 & 9 & -9 \end{pmatrix}$	15	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$		

2) Вычислить определители второго и третьего порядка:

Номер варианта	Определитель	Определитель
1	$\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 7 & -5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & -1 \end{vmatrix}$

2	$\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix}$
3	$\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$
4	$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}$
5	$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -5 \end{vmatrix}$
6	$\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 6 & -5 & 2 \end{vmatrix}$
7	$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 9 \\ 7 & 3 & -6 \\ 7 & 9 & -9 \end{vmatrix}$
8	$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$
9	$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$
10	$\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$
11	$\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 11 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

12	$\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$
13	$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$
14	$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$
15	$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$

Приложение

4. Самостоятельная работа по теме Практического занятия №1 «Действия над матрицами. Вычисление определителей».

Самостоятельная работа по теме занятия включает в себя:

- Изучение теоретического материала лекционных занятий, учебной литературы, Интернет-ресурсов, раздела «Краткие сведения из теории» настоящего описания ПЗ;
- Выполнения практических заданий и решение задач.

Задачи и практические задания:

Базовый уровеньсложности

1. Найти матрицы:

1) $C = A - B$, где А $= \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ -8 & 3 & -1 \\ 6 & -5 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -5 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2) $C = 3A - 2B$, где А $= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 7 \\ -1 & 2 & -5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix}$;

3) $D = 2A - 4B + 5C$, где$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 2 \\ 0 & 6 & -8 \\ 3 & -9 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -1 \\ 9 & -2 & 5 \\ 3 & -8 & 4 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -3 & 6 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

2. Найти произведение матриц АВ:

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 2 & -5 & 7 \end{pmatrix}$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

3) $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ -2 & -5 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Найти значение матричного многочлена, где Е- единичная матрица второго порядка, если$2A^2 + 3(B - 4E)$. если

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$;

4. Вычислить определитель второго порядка

1) $\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$;

2) $\begin{vmatrix} -2 & 9 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$.

5. Вычислить определитель третьего порядка

1) $\begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 \\ 9 & 7 & 5 \\ 7 & 5 & 3 \end{vmatrix}$;

2) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 7 & -5 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \\ 8 & -8 & 3 \end{vmatrix}$

Повышенной уровень сложности

1. Найти матрицы:

1) $C = A^T + B$, где $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -6 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$;

2) $C = B^T + A$, где$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -7 & 4 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $C^T = -A - B^T$, где А = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, В = $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Найти произведение матриц АВ:

1) А=$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, В=$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -1 \\ 5 & -9 \end{pmatrix}$;

2) А=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, В=$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

3. Найти значение матричного многочлена, где Е- единичная матрица второго порядка, если $5A^3 + 2(B - 4E)^2$. если

1) А = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, В = $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

2) А = $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, В = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$;

3) А = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, В = $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4. Вычислить определитель третьего порядка

1) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 3 \end{vmatrix}$;

2) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

5. Вычислить определитель четвертого порядка

1) $\begin{vmatrix} -5 & 6 & 10 & 6 \\ -9 & 8 & 8 & 5 \\ -8 & 5 & 9 & 5 \\ -11 & 7 & 7 & 4 \end{vmatrix}$;

2) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Контрольные вопросы по теме.

1. Что называется матрицей?
2. Что называется матрицей-строкой, матрицей столбцом?
3. Какие матрицы называются прямоугольными, квадратными?
4. Какие матрицы называются равными?
5. Что называется главной диагональю матрицы?
6. Какая матрица называется диагональной?
7. Какая матрица называется единичной?
8. Какая матрица называется треугольной?
9. Что значит транспонировать матрицу?
10. Что называется суммой матриц?
11. Что называется произведением матрицы на число?
12. Как найти произведение двух матриц?
13. В чем состоит обязательное условие существования произведения матриц?
14. Что называется определителем матрицы?
15. Как вычислить определитель третьего порядка по схеме треугольников?
16. Что называется минором?
17. Что называется алгебраическим дополнением элемента определителя?
18. Как разложить определитель по элементам столбца или строки?
19. Перечислите свойства определителя.
20. Какая матрица называется невырожденной?
21. Какая матрица называется обратной по отношению к данной?
22. Каков алгоритм нахождения обратной матрицы?

1. Практическое занятие № 2

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙС ПОМОЩЬЮ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

Цель практического занятия: В соответствии с рабочей программой по дисциплине «Математика» в результате изучения обязательной части цикла обучающийся должен:

уметь:

- применять методы линейной алгебры;
- выполнять действия над матрицами, вычислять определители;
- решать систему линейных уравнений разными способами;

знать:

- основные свойства определителей и матриц; основные методы вычисления определителей;
- основные способы решения СЛАУ.

Таким образом, студент во время проведения Практического занятия и самостоятельной работы по теме должен:

а) приобрести понятия и знания основных методов линейной алгебры,

б) приобрести умения применять методы нахождения и использования матриц и определителей; приобрести умения решений СЛАУ;

в) приобрести навыки и умения решения систем линейных уравнений с помощью матричного уравнения.

1. Краткие сведения из теории

Под *системой линейных алгебраических уравнений* (СЛАУ) подразумевают систему

уравнений, содержащую m уравнений и n неизвестных ($x1,x2,\ldots,xn$). Частный пример такой системы является система трех уравнений с тремя неизвестными (x, y, z):

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Параметры aij (i=1,2, 3, j=1,2,3) называют *коэффициентами*, а bi (i=1,2,3) – *свободными членами* СЛАУ. С каждой СЛАУ можно связать несколько матриц; более того – саму СЛАУ можно записать в виде матричного уравнения в виде $AX = B$, где

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ - матрица системы , $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ - матрица неизвестных, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ - матрица свободных членов СЛАУ .

Решение этой системы имеет вид $X = A^{-1}B$ (если $\Delta \neq 0$), (1)

где A^{-1} - матрица, обратная по отношению к матрице А.

Метод присоединённой (союзной) матрицы

Пусть задана матрица $A^{n\times n}$. Для того, чтобы найти элементы матрицы A^{-1}, требуется осуществить три шага:

1. Найти определитель матрицы A и убедиться, что $\Delta A \neq 0$, т.е. что матрица А – невырожденная.
2. Составить алгебраические дополненияAij каждого элемента матрицы A и записать матрицу $A*n\times n=(Aij)$ из найденных алгебраических дополнений.
3. Записать обратную матрицу с учетом формулы $A^{-1}=1\Delta A\cdot A*T$.

Матрицу A^{*T} часто именуют присоединённой (взаимной, союзной) к матрице A.

A^{-1} находится по формуле:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{31}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{32}}{\Delta} \\ \frac{A_{13}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \frac{A_{33}}{\Delta} \end{pmatrix}, \text{ где } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ - определитель системы;

A_{mn} - алгебраическое дополнение элемента матрицы a_{mn}, т.е.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad A_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix};$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix};$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}; \quad A_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

2. Решение типовых примеров

2.1. Решить систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ x + 11y = 6 \end{cases},$$ представив ее в виде матричного уравнения.

Перепишем систему в виде AX = B , где

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 11 \end{vmatrix} = 55 + 3 = 58$.

Найдем алгебраические дополнения элементов этого определителя:

$A_{11} = 11$ $A_{12} = -1$

$A_{21} = 3$ $A_{22} = 5$

Тогда, обратная матрица имеет вид: $A^{-1} = \frac{1}{58}\begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Таким образом, по формуле (4) имеем:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{58}\begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{58}\begin{pmatrix} 11+18 \\ -1+30 \end{pmatrix} = \frac{1}{58}\begin{pmatrix} 29 \\ 29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} .$$

Ответ: (1/2; 1/2) .

2.2. Решить систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 9 \\ x + 2y - 3z = 14 \\ 3x + 4y + z = 16 \end{cases}$, представив ее в виде матричного уравнения.

Перепишем систему в виде AX = B , где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} .$$

Вычислим определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 28 - 30 - 4 = -6$.

Найдем алгебраические дополнения элементов этого определителя:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 14 ; \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10 ; \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 ;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 5 ; \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4 ; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 ;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -13 ; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 8 ; \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 .$$

Тогда, обратная матрица имеет вид: $A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Таким образом по формуле (1) имеем:

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 126+70-208 \\ -90-56+128 \\ -18+14+16 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -12 \\ -18 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: (2; 3; -2) .

Суть метода обратной матрицы можно выразить в следующих пунктах:

1. Записать три матрицы: матрицу системы A, матрицу неизвестных X, матрицу свободных членов B.
2. Найти обратную матрицуA^{-1}.
3. Используя равенство $X=A^{-1}\cdot B$ получить решение заданной СЛАУ.
4. При переходе от обычного вида системы линейных алгебраических уравнений к ее матричной форме следует быть внимательным с порядком следования неизвестных переменных в уравнениях системы

3. Выполнение аудиторных заданий

Решить системы уравнений с помощью матричного уравнения в соответствии с номером варианта:

Номер варианта	Система уравнений	Система уравнений
1	$\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 3x + 2y = 10 \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ 3x + 2y + z = 10 \\ 4x + 3y - 2z = 4 \end{cases}$
2	$\begin{cases} 4x + 5y = 6 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + z = 6 \\ 3x - 4y = -2 \\ 2y - z = 2 \end{cases}$
3	$\begin{cases} x + 4y = -10 \\ 2x - 2y = 10 \end{cases}$	$\begin{cases} x + 3y - 6z = 12 \\ 3x + 2y + 5z = -10 \\ 2x + 5y - 3z = 6 \end{cases}$
4	$\begin{cases} 3x - y = 4 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8 \\ x + 5y + 2z = 5 \\ 2x + 3y + 4z = 3 \end{cases}$

5	$\begin{cases} 3x-2y=3 \\ 4x+y=15 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+4y+z=4 \\ 3x+6y+2z=4 \\ 4x-y-3z=1 \end{cases}$
6	$\begin{cases} 5x-2y-6=0 \\ 7x-5y-4=0 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+y-3z=-1 \\ x-3y+2z=10 \\ 3x-4y-z=5 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 5x-3y=16 \\ 2x+4y=22 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y-z=9 \\ 2x-y+3z=13 \\ 3x+2y-5z=-1 \end{cases}$
8	$\begin{cases} 4x+y=17 \\ 3x-5y=7 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ 2x-y-z=1 \\ x+3y+4z=6 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 3x-2y=5 \\ 4x+y=14 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-4y+3z=1 \\ x-2y+4z=3 \\ 3x-y+5z=2 \end{cases}$
10	$\begin{cases} 3x+4y=9 \\ 2x-5y=6 \end{cases}$	$\begin{cases} x-2y+4z=6 \\ 2x-y+3z=11 \\ 4x+y-5z=9 \end{cases}$
11	$\begin{cases} -2x+7y=9 \\ x+y=0 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-3y+z=2 \\ 2x+y-4z=9 \\ 6x-5y+2z=17 \end{cases}$
12	$\begin{cases} 2x+3y=8 \\ x-2y=-3 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-4y+9z=28 \\ 7x+3y-6z=-1 \\ 7x+9y-9z=5 \end{cases}$
13	$\begin{cases} 5x+2y=11 \\ 4x-y=14 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x-3y+2z=2 \\ 3x+y+z=8 \end{cases}$
14	$\begin{cases} x+4y=12 \\ 3x-2y=-6 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ -3x+y+2z=0 \\ x+4y+3z=2 \end{cases}$

15	$\begin{cases} 9x+2y=8 \\ 4x+y=3 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-y+z=2 \\ 3x+2y+2z=-2 \\ x-2y+z=1 \end{cases}$

Приложение

4. Самостоятельная работа по теме Практического занятия №2 «Решение систем линейных уравнений с помощью матричного уравнения»

Самостоятельная работа по теме занятия включает в себя:

- Изучение теоретического материала лекционных занятий, учебной литературы, Интернет-ресурсов, раздела «Краткие сведения из теории» настоящего описания ПЗ;
- Выполнения практических заданий и решение задач.

Задачи и практические задания:

Базовый уровень сложности

1. Для матрицы A найти обратную матрицу A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Решить системы 2 уравнений с двумя неизвестными с помощью матричного уравнения:

1) $\begin{cases} x+5y=7 \\ 3x-2y=4 \end{cases};$

2) $\begin{cases} 12x-5y=7 \\ 11x+3y=14 \end{cases};$

3) $\begin{cases} 3x+10y=7 \\ 5x-2y=-7 \end{cases};$

3. Решить системы 2 уравнений с двумя неизвестными методом Крамера

1) $\begin{cases} 5x+y=7 \\ x-2y=4 \end{cases};$

2) $\begin{cases} 3x-5y=7 \\ 2x+3y=14 \end{cases};$

3) $\begin{cases} 2x+12y=7 \\ 5x-2y=-7 \end{cases}$

Повышенной уровень сложности

1. Решить системы 3-х уравнений с тремя неизвестными с помощью матричного уравнения:

$$1)\ \begin{cases} 2x - 3y + 6z = 14 \\ 3x - 4y + 2z = -25; \\ 7x - 6y + 4z = -43 \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} 8x - 2y - 6z = 32 \\ 6x - 4y + 3z = -21; \\ x + 2y + 2z = -3 \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} 7x - 6y - 4z = -54 \\ 4x - 2y - 3z = -28 \\ 4x + 4y + z = 30 \end{cases}$$

2. Решить системы уравнений с двумя неизвестными с помощью матричного уравнения, $\beta -$ некоторое действительное число:

$$\begin{cases} (\beta + 2)x_1 - 2x_2 = 1 \\ x_1 + \beta x_2 = 2 \end{cases}$$

3. Решить системы 3 уравнений с двумя неизвестными методом Крамера

$$1)\ \begin{cases} x - y + z = 6 \\ 2\,x + y + z = 3\ ; \\ x + y + 2z = 5 \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} 2x - y = 7 \\ 5x + 3y - 6z = -5; \\ -x - 2y + 3z = 7 \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} 2x + y + z = 6 \\ x - y + z = 5 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases}$$

Контрольные вопросы по теме.

1. Свойства матриц. Действия с матрицами.
2. Системы линейных алгебраических уравнений: основные понятия и определения.
3. Матричная запись СЛАУ.
4. Нахождение союзной матрицы
5. Транспонирование матриц.
6. Решение СЛАУ методом обратной матрицы.
7. Условия существования ненулевых решений СЛАУ .

3. Практическое занятие № 3

СКАЛЯРНОЕ И ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Цель практического занятия: В соответствии с рабочей программой по дисциплине «Математика» в результате изучения обязательной части цикла обучающийся должен:

уметь:

- выполнять действия над векторами;
- вычислять скалярное и векторное произведения векторов;
- находить углы между векторами и применять векторное произведение для вычисления площадей;

знать:

- основные понятия и методы аналитической геометрии;

Таким образом, студент во время проведения Практического занятия и самостоятельной работы по теме должен:

а) приобрести понятия и знания основ аналитической геометрии,

б) приобрести умения применять методы аналитической геометрии в решении задач.

1. Краткие сведения из теории

Понятие вектора

Некоторые физические величины (сила, скорость, ускорение и др.) характеризуются не только числовым значением, но и направлением. Такие величины принято изображать направленными отрезками, которые называются ***векторами***.

Абсолютной величиной (или модулем) вектора называется длина отрезка, изображающего вектор.

Координаты вектора.

В прямоугольной системе координат в пространстве любой вектор $\vec{a}$ можно разложить единственным образом по базисным векторам $\vec{i};\vec{j};\vec{k}$: $\vec{a}= a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}$, где коэффициенты a_x, a_y и a_z этого разложения называются координатамивектора $\vec{a}$ в данной системе координат.

Абсолютная величина вектора $\vec{a}$ равна квадратному корню из суммы квадратов его координат: $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$.

Действия над векторами, заданными своими координатами.

1. При сложении двух (или большего числа) векторов их соответственные координаты складываются:

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_x+b_x;a_y+b_y;a_z+b_z).$$

2) При вычитании векторов их соответственные координаты вычитаются:

$$\vec{a}-\vec{b}=(a_x-b_x;a_y-b_y;a_z-b_z).$$

3) При умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число:

$$\lambda\,\vec{a}=(\lambda\,a_x;\lambda\,a_y;\lambda\,a_z).$$

Скалярное произведение двух векторов

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называют число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi.$$

Скалярное произведение равно сумме попарных произведений соответствующих координат векторов: $\vec{a}\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

Свойства скалярного произведения:

1) $\vec{a}\,\vec{b}=\vec{b}\,\vec{a}$;

2) $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\,\vec{c}+\vec{b}\,\vec{c}$;

3) $(\lambda\,\vec{a})\vec{b}=\lambda(\vec{a}\,\vec{b})$, где λ - скаляр;

4) $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\,\vec{b}=0$ (условие перпендикулярности векторов);

5) $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$.

Вычисление угла между векторами

Из определения скалярного произведения векторов можно получить величину угла между векторами: $\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

или в координатах: $\cos\varphi=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$.

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор,

обозначаемый символом $\vec{a}\times\vec{b}$ (или $[a,b]$), определяемый тремя условиями:

1) вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ перпендикулярен плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

2) длина вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\vec{a}\vec{b})$;

3) упорядоченная тройка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$ правая, т.е. кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ виден из конца $\vec{a}\times\vec{b}$ совершающимся против часовой стрелки.

Свойства векторного произведения:

1) $\vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a})$;

2) $(\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}\times\vec{b})$, где λ - скаляр;

3) $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c} + \vec{b}\times\vec{c}$.

4) $\vec{a}\,||\,\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b} = 0$ (условие коллинеарности векторов).

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами в прямоугольном базисе, то **векторное произведение** $\vec{a}\times\vec{b}$ может быть вычислено разложением определителя по элементам первой строки

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

2. Решение типовых заданий

Задание 1. Даны два вектора: $\vec{a}(4;3;12)$ и $\vec{b}(12;16;21)$.

1) Найдите координаты вектора $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$.

Координаты векторов $3\vec{a}$ и $2\vec{b}$ находим по правилу умножения вектора на число: $3\vec{a}(3\cdot4;3\cdot3;3\cdot12)=(12;9;36)$, $2\vec{b}=(2\cdot12;2\cdot16;2\cdot21)=(24;32;42)$. Координаты вектора $\vec{c}$ находятся по правилу вычитания векторов:

$\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b} = (12-24;9-32;36-42)=(-24;-23;-6)$.

2) Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

По формуле скалярного произведения:

$$\vec{a}\,\vec{b} = 4\cdot12 + 3\cdot16 + 12\cdot21 = 48+48+252=348.$$

3) Вычислите $(\vec{a}-\vec{b})^2$.

$\vec{a} - \vec{b} = (4-12;\ 3-16;\ 12-21) = (-8;-13;-9)$;

Скалярное произведение: $(\vec{a}-\vec{b})^2 = (-8)\,(-8) + (-13)\,(-13) + (-9)\,(-9) = =64+169+81 = 314$.

4) Найдите длину векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Длина вектора $\vec{a}$: $|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$.

Длина вектора $\vec{b}$: $|\vec{b}| = \sqrt{12^2 + 16^2 + 21^2} = \sqrt{841} = 29$.

5) Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{348}{13 \cdot 29} = \frac{12}{13};$$

$$\varphi = \arccos\frac{12}{13} \approx 23^\circ .$$

Задание 2.

На векторах $\overrightarrow{\grave{A}\hat{A}}$ = -5$\vec{m}$+11$\vec{n}$ и $\overrightarrow{\grave{A}\tilde{N}}$ = 2$\vec{m}$+6$\vec{n}$ построен треугольник ABC.Найти площадь треугольника ABC и его высоту, опущенную на сторону BC, если длины векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$ равны соответственно 1 и $\sqrt{2}$, а угол , образованный векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$, равен 135°.

Решение:

1) Найдём площадь S треугольника ABC. Площадь треугольника, построенного на векторах, равна половине модуля их векторного произведения, то есть $S = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{\grave{A}\hat{A}} \times \overrightarrow{\grave{A}\tilde{N}}\right|$.

Вычислим векторное произведение векторов $\overrightarrow{\grave{A}\hat{A}}$ и $\overrightarrow{\grave{A}\tilde{N}}$. Для этого применим распределительное свойство векторного произведения:

$\overrightarrow{\grave{A}\hat{A}} \times \overrightarrow{\grave{A}\tilde{N}}$ = (-5$\vec{m}$+11$\vec{n}$)×(2$\vec{m}$+6$\vec{n}$) = -10$\vec{m} \times \vec{m}$+22$\vec{n} \times \vec{m}$-30$\vec{m} \times \vec{n}$+66$\vec{n} \times \vec{n}$.

Векторное произведение вектора самого на себя равно нулевому вектору, следовательно, $\vec{m} \times \vec{m}$=0, $\vec{n} \times \vec{n}$=0; при перестановке сомножителей векторное произведение меняет знак на противоположный, значит -30$\vec{m} \times \vec{n}$= 30$\vec{n} \times \vec{m}$.Отсюда $\overrightarrow{\grave{A}\hat{A}} \times \overrightarrow{\grave{A}\tilde{N}}$ = 22$\vec{n} \times \vec{m}$+30$\vec{n} \times \vec{m}$=52$\vec{n} \times \vec{m}$.

Находим модуль полученного вектора

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = 52\left|\vec{n} \times \vec{m}\right| = 52 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 \cdot \sin 135^\circ = 52 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 52.$$

Следовательно, $S = \frac{1}{2} \cdot 52 = 26$.

2) Найдём сторону BC треугольника ABC, то есть длину вектора $\overrightarrow{BC}$. Согласно правилу треугольника сложения векторов, $\overrightarrow{\grave{A}\hat{A}}$+ $\overrightarrow{\hat{A}\tilde{N}}$ = $\overrightarrow{\grave{A}\tilde{N}}$, откуда $\overrightarrow{BC}$ =$\overrightarrow{\grave{A}\tilde{N}}$-$\overrightarrow{AB}$ = (2$\vec{m}$+6$\vec{n}$) - (-5$\vec{m}$+11$\vec{n}$) = 2$\vec{m}$+6$\vec{n}$+5$\vec{m}$-11$\vec{n}$ = 7$\vec{m}$-5$\vec{n}$.

Найдём длину полученного вектора по формуле: $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC}}$.

Скалярное произведение вектора $\overrightarrow{BC}$ самого на себя:

$\overrightarrow{ÂÑ} \cdot \overrightarrow{ÂÑ} =$ (7$\vec{m}$ -5$\vec{n}$)(7$\vec{m}$ -5$\vec{n}$) = 49$\vec{m} \cdot \vec{m}$ -35$\vec{m} \cdot \vec{n}$ -35$\vec{n} \cdot \vec{m}$ +25$\vec{n} \cdot \vec{n}$.

Учитывая, что $\vec{m} \cdot \vec{m} = |m|^2, \vec{n} \cdot \vec{n} = |n|^2, \vec{m} \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \vec{m}$, получаем

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = 49|m|^2 \text{-}70\,\vec{m} \cdot \vec{n} + 25|n|^2 = 49 \cdot 1^2 - 70 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 135^\circ + 25 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 =$$

$$= 49\text{-}\ 70 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 25 \cdot 2 = 49+70+50 = 169.$$

Таким образом, ВС = $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{169}$ = 13.

3) Найдём высоту h треугольника ABC, опущенную на сторону ВС.

По формуле площади треугольника имеем $S = \dfrac{1}{2} h \cdot BC$, откуда $h = \dfrac{2S}{BC}$.

Площадь треугольника S и сторона ВС найдены раннее: S = 26, BC = 13.

Следовательно, h = $\dfrac{2 \cdot 26}{13} = \dfrac{52}{13}$ = 4.

3. Выполнение аудиторных заданий

1. *В соответствии с номером варианта:*
   1) найдите координаты векторов $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{d} = -4\vec{a}$,
   2) вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$,
   3) вычислите $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2$,
   4) определите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

№ варианта	$\vec{a}$	$\vec{b}$
1	$3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$	(-1;2;1)
2	$\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$	(1;0;-1)
3	$2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$	(-2;1;1)
4	$\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$	(0;-2;2)
5	$2\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$	(1;-2;2)

6	$\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$	(3;-2;1)
7	$3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$	(0;3;-1)
8	$2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$	(1;0;-1)
9	$-\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$	(2;1;0)
10	$3\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$	(-1;0;1)

2. *Найти в соответствии с номером варианта*:
   1) площадь треугольника ABC, построенного на векторах $\overrightarrow{ÀÂ}$ и $\overrightarrow{ÀÑ}$,
   2) его высоту, опущенную на сторону В.

№ варианта	$\overrightarrow{ÀÂ}$	$\overrightarrow{ÀÑ}$	$\lvert\vec{n}\rvert$	$\lvert\vec{m}\rvert$	$(\vec{n},\vec{m})$
1	$\vec{n}-3\vec{m}$	$2\vec{n}+\vec{m}$	2	3	$\frac{\pi}{6}$
2	$\vec{n}+\vec{m}$	$\vec{n}+3\vec{m}$	1	2	$\frac{\pi}{2}$
3	$2\vec{n}-\vec{m}$	$4\vec{n}+\vec{m}$	2	1	$\frac{\pi}{3}$
4	$\vec{n}-2\vec{m}$	$\vec{m}-2\vec{n}$	3	1	$\frac{\pi}{6}$
5	$\vec{n}+3\vec{m}$	$\vec{m}-3\vec{n}$	1	1	$\frac{\pi}{3}$
6	$2\vec{n}+\vec{m}$	$3\vec{m}-\vec{n}$	2	3	$\frac{\pi}{4}$
7	$\vec{n}+2\vec{m}$	$2\vec{m}+\vec{n}$	1	1	$\frac{\pi}{2}$

8	$\vec{m}$ -3 $\vec{n}$	$\vec{m}$ +4 $\vec{n}$	2	2	$\frac{\pi}{6}$
9	3 $\vec{m}$ - $\vec{n}$	2 $\vec{m}$ + $\vec{n}$	1	1	$\frac{\pi}{3}$
10	$\vec{m}$ +2 $\vec{n}$	2 $\vec{m}$ -3 $\vec{n}$	2	1	$\frac{\pi}{6}$

Приложение

4. Самостоятельная работа по теме Практического занятия №3 «Скалярное и векторное произведения векторов и их приложения»

Самостоятельная работа по теме занятия включает в себя:

- Изучение теоретического материала лекционных занятий, учебной литературы, Интернет-ресурсов, раздела «Краткие сведения из теории» настоящего описания ПЗ;
- Выполнения практических заданий и решение задач.

Задачи и практические задания:

Базовый уровень сложности

1. Даны векторы $\vec{a}\{2;3;0\}, \vec{b} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}, \vec{c}\{3;1;0\}$.
   1) Найти координаты векторов: $\vec{d} = 3\vec{a}$; $\vec{e} = -5\vec{c}$; $\vec{f} = \vec{a} - 2\vec{c}$; $\vec{g} = -2\vec{a} - 3\vec{b}$; $\vec{h} = 4\vec{b} + 3\vec{c}$.
   2) Найти скалярное произведение векторов:
      А) $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
      Б) $\vec{a}$ и $\vec{c}$;
      В) $\vec{b}$ и $\vec{c}$.
   3) Вычислить:
      А) $(\vec{a} + \vec{b})^2$;
      Б) $(\vec{a} - \vec{c})^2$;
      В) $(\vec{b} + \vec{c} - \vec{a})^2$.
   4) Определить угол между векторами:
      А) $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
      Б) $\vec{a}$ и $\vec{c}$;
      В) $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

2. Найти площадь треугольника ABC, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ и высоту, опущенную на сторону BC, если
   1) $\overrightarrow{AB} = \vec{m} + 2\vec{n}$; $\overrightarrow{AC}=3\vec{m} - 4\vec{n}$; $|\vec{m}| = 3$; $|\vec{n}| = 1$; $(\widehat{\vec{m};\vec{n}}) = \frac{\pi}{6}$;
   2) Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(-1, 2, 3)$, $B(5, 1, 4)$ и $C(3, 2, 2)$;
   3) Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} + \overline{b}$ и $\overline{b}$ как на сторонах, если $|\overline{a}| = 1$, $|\overline{b}| = 2$ и $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}) = 60^0$.

Повышенной уровень сложности

ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ

«Скалярное и векторное произведения векторов и их приложения»

Вариант 0

1. Разложить вектор $\overline{\mathrm{C}} = \{2, 0\}$ по векторам $\overline{\mathrm{a}} = \{1,1\}$ и $\overline{\mathrm{b}} = \{1,-1\}$

2. Найти длину вектора $\overline{p} + 2\overline{q}$, если $\overline{p} = \overline{a} - \overline{b}$, $\overline{q} = \overline{a} + 2\overline{b}$, $|\overline{a}| = 1$;

   $|\overline{b}| = 3$; $\overline{a}\hat{}\overline{b} = \frac{2}{3}\pi$.

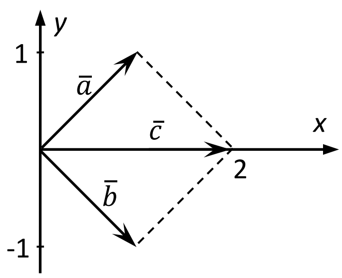
3. Найти вектор $\overline{\mathrm{x}}$, коллинеарный вектору $\overline{a} = \{2, 1, -2\}$и удовлетворяющий условию $(\overline{x} \cdot \overline{a}) = 27$.

4. Вычислить угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\overline{p} = 2\overline{a} + \overline{b} - \overline{c}$ и $\overline{q} = \overline{a} - 3\overline{b} + \overline{c}$, где $\overline{a}; \overline{b}; \overline{c} -$ единичные взаимно перпендикулярные векторы (косинус угла).

5. Найти вектор $\overline{\mathrm{x}}$, перпендикулярный векторам$\overline{a} = \{1, 1, 1\}$и $\overline{b} = \{2, 0, 1\}$ и образующий с осью OX тупой угол, если $|\overline{x}| = \sqrt{6}$.

<u>I. Решение</u>

Разложить вектор $\overline{c}$ по векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – это значит представить $\overline{\mathrm{c}}$ в виде $\mathrm{c} = \alpha \cdot \overline{a} + \beta \cdot \overline{b}$, где α и β пока неизвестные числа. Переходя к координатам, получим: $2\overline{i} + 0\overline{j} = (\alpha + \beta)\overline{i} + (\alpha - \beta)\overline{j}$.



В результате приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases},$$

решением которой являются $\alpha = 1$ и $\beta = 1$. Отсюда $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$.

Ответ: $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$

2. Решение

Как известно, модуль вектора равен корню квадратному из скалярного квадрата этого вектора $|\overline{p} + 2\overline{q}| = \sqrt{(\overline{p} + 2\overline{q})^2}$. Находим скалярный квадрат $(\overline{p} + 2\overline{q})^2 = (\overline{a} - \overline{b} + 2\overline{a} + 4\overline{b})^2 = (3\overline{a} + 3\overline{b})^2 = 9(\overline{a}^2 + 2\overline{a}\overline{b} + \overline{b}^2) =$

$= 9\left(1 + 2 * 3 * cos\frac{2}{3}\pi + 9\right) = 63$.Отсюда $\left|\overline{p} + 2\overline{q}\right| = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$.

Ответ: $3\sqrt{7}$

3. Решение

В силу коллинеарности вектор $\overline{x}$ можно представить в виде $\overline{x} = \lambda\overline{a}$, где λ – пока неизвестный множитель. Для его определения используем второй пункт условия $(\overline{x} \cdot \overline{a}) = \lambda\overline{a}^2 = \lambda(4 + 1 + 4) = 9\lambda = 27$.Отсюда $\lambda = 3$ и $\overline{x} = 3\overline{a} = \{6,3,-6\}$.

Ответ: $\overline{x}=\{6,3,-6\}$

4. Решение

Известно, что диагонали параллелограмма можно найти

$$\overline{d}1 = \overline{p} + \overline{q} = 3\overline{a} - 2\overline{b} + 0\overline{c}$$

$$\overline{d}2 = \overline{p} - \overline{q} = \overline{a} + 4\overline{b} - 2\overline{c}$$

т.к. векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ представляют собой единичные взаимно перпендику-лярные вектора, то *их* можно считать координатным базисом, тогда для нахождения требуемого угла воспользуемся формулой

$$cos(\overline{d}_1 \wedge \overline{d}_2) = \frac{\overline{d}1 * \overline{d}2}{|\overline{d}1| * |\overline{d}2|} = \frac{3*1+(-2)*4+0*(-2)}{\sqrt{3^2+1^2} * \sqrt{1^2+4^2+2^2}} = \frac{-5}{\sqrt{13}*\sqrt{21}} = \frac{-5}{\sqrt{273}}$$

Ответ: $\frac{-5}{\sqrt{273}}$

5. Решение

Найдем вектор $\overline{c} \perp \overline{a}, \overline{c} \perp \overline{b}$, следовательно,

$$\overline{c} = [[\overline{a}, \overline{b}]] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}$$

Поскольку вектор $\overline{x}$ перпендикулярен векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$, то он коллинеарен вектору $\overline{c}$. Следовательно, $\overline{x} = \lambda * \overline{c} = \{\lambda, \lambda, -2\lambda\}$.

Так как $|\overline{x}| = \sqrt{\lambda^2+\lambda^2+4\lambda^2} = \sqrt{6}|\lambda| = \sqrt{6}$, то $\lambda = \pm 1$. Вектор $\overline{x}$ образует тупой угол с осью OX, поэтому его проекция (координата) на эту ось должна быть отрицательной, отсюда $\lambda = -1$ и $\overline{x} = -\overline{c} = \{-1,-1,2\}$.

Ответ: $\overline{x} = \{-1,-1,2\}$

Варианты самостоятельной работы по теме ***«С*****калярное и векторное произведения векторов и их приложения*»*.**

Вариант 1.

1. Разложить вектор $\overline{C} = (4,5)$ по векторам $\overline{a} = (5,4)$и $\overline{b} = (1,-1)$.

2. Дано: $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 5$, $|\overline{c}| = 8$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b}) = 90^0$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{c}) = 90^0$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{c}) =$

$= (\overline{b}\hat{\ }\overline{c}) = 60^0$, Найти $(3\overline{a} - 2\overline{b})(\overline{b} + 3\overline{c})$.

3. Вычислить проекцию вектора $\overline{a} = (5,2,5)$ на ось вектора $\overline{AB}$, если

   $A(-1, 1, 0)$и $B(1, 0, 2)$.

4. Дано: $|\overline{a}| = 4$, $|\overline{b}| = 6$. Найти, при каком α векторы $\overline{a} + \alpha\overline{b}$ и $\overline{a} - \alpha\overline{b}$ будут взаимно перпендикулярны.

5. Вычислить $|[\overline{a}\overline{b}]|$, если $|\overline{a}| = 8$, $|\overline{b}| = 15$ и $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b}) = 90^0$.

Вариант 2.

1. Разложить вектор $\overline{C} = (3, 6)$ по векторам $\overline{a} = (5, 4)$ и $\overline{b} = (1, -1)$.

2. Дано: $|\overline{a}| = 2$, $|\overline{b}| = 1$, $|\overline{c}| = 8$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b}) = 90^0$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{c}) = (\overline{b}\hat{\ }\overline{c}) = 60^0$. Найти $(3\overline{a} - 2\overline{b})(\overline{b} + 3\overline{c})$.

3. Вычислить проекцию вектора $\overline{a} = (3, 2, 2)$ на ось вектора $\overline{AB}$, если A (1, -2, 7) и $B(4, 2, 7)$.

4. Дано: $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 5$. Найти, при каком α векторы $\overline{a} + \alpha\overline{b}$ и $\overline{a} - \alpha\overline{b}$будут взаимно перпендикулярны.

5. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(2, 3, 4)$, $B(1, 0, 6)$ и $C(4, 5, -2)$.

Вариант 3.

1. Разложить вектор $\overline{C} = (2, 7)$ по векторам $\overline{a} = (5, 4)$ и $\overline{b} = (1, -1)$.

2. Дано: $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 5$, $|\overline{c}| = 8$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b}) = 90^0$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{c}) = (\overline{b}\hat{\ }\overline{c}) = 60^0$. Найти $(\overline{a} + 2\overline{b} - 3\overline{c})^2$.

3. Вычислить проекцию вектора $\overline{a} = (3, 2, 1)$ на ось вектора $\overline{AB}$, если $A(2, -2, 0)$ и $B(-2, 2, 2)$.

4. Дано: $|\overline{a}| = 4$, $|\overline{b}| = 10$. При каком α векторы $\overline{a} + \alpha\overline{b}$ и $\overline{a} - \alpha\overline{b}$ будут взаимно перпендикулярны?

5. При каком α векторы $\overline{p} = \alpha\overline{a} + 5\overline{b}$ и $\overline{q} = 3\overline{a} - \overline{b}$ будут коллинеарны, если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ не коллинеарны

Вариант 4.

1. Разложить вектор $\overline{C}$= (1, 8) по векторам $\overline{a}$ = (5, 3) и $\overline{b}$ = (1, -1).

2. Дано: $|\overline{a}|$ = 2, $|\overline{b}|$ = 1, $|\overline{c}|$ = 8, $(\overline{a}\hat{}\overline{b}) = 90^0$, $(\overline{a}\hat{}\overline{c}) = (\overline{b}\hat{}\overline{c}) = 60^0$.

   Найти $(\overline{a} + 2\overline{b} - 3\overline{c})^2$.

3. Вычислить проекцию вектора $\overline{a}$ = (1, 2, 3) на ось вектора $\overline{AB}$,если A(-3, 1, 4) и B(3, 3, 1).

4. Дано: $|\overline{a}|$ = 4, $|\overline{b}|$ = 1. При каком α векторы $\overline{a} + \alpha\overline{b}$ и $\overline{a} - \alpha\overline{b}$ будут взаимно перпендикулярны?

5. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах

   $3\overline{a} - 2\overline{b}$ и $2\overline{a} + 3\overline{b}$, если $|\overline{a}|$ = 2, $|\overline{b}|$ = 5, $(\overline{a}\hat{}\overline{b}) = 30^0$.

Вариант 5.

1. Разложить вектор $\overline{C}$ = (0, 9) по векторам $\overline{a}$ = (5, 4) и $\overline{b}$ = (1, -1).

2. Дано: $|\overline{a}|$ = 1, $|\overline{b}|$ = 4, $|\overline{c}|$ = 2, $(\overline{a}\hat{}\overline{c}) = 90^0$, $(\overline{a}\hat{}\overline{b}) = (\overline{b}\hat{}\overline{c}) = 60^0$.Найти $(\overline{a} - \overline{b})\cdot(3\overline{a} + \overline{c})$.

3. Вычислить проекцию вектора $\overline{a}$ = (-1, 2, -3) на ось вектора $\overline{AB}$, если A(5, -5, 5) и

B(5, 3, 1).

4. Вычислить косинус угла, образованного векторами $\overline{a}$ = (2, -4, 4) и $\overline{b}$=(-3, 2, 6).

5. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах

   $2\overline{a} - \overline{b}$ и $2\overline{a} + \overline{b}$, если $\overline{a}$ = (3, -2, -2) и $\overline{b}$ = (1, -2, -1).

4. Практическое занятие № 4
ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

Цель практического занятия: В соответствии с рабочей программой по дисциплине «Математика» в результате изучения обязательной части цикла обучающийся должен:

уметь:

- применять методы теории комплексных чисел;

знать:

- основные методы теории комплексных чисел;

Таким образом, студент во время проведения Практического занятия и самостоятельной работы по теме должен:

а) приобрести понятия и знания основ теории комплексных чисел,

б) приобрести навыки и умения выполнения действий над комплексными числами.

1. Краткие сведения из теории

Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме

Над комплексными числами, заданными в алгебраической форме, удобно производить сложение, вычитание, умножение и деление.

Пусть даны два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$, тогда

1) Суммой двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i;$$

2) Разностью двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i;$$

3) Произведением двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i.$$

На практике два комплексных числа перемножаются как обычные многочлены, при этом учитывается, что $i^2 = -1$.

4) Частным двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^{\,2} + b_2^{\,2}} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^{\,2} + b_2^{\,2}} i .$$

На практике при делении двух комплексных чисел достаточно умножить числитель и знаменатель дроби $\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i}$ на число сопряженное знаменателю, то есть на число $a_1 - b_1 i$.

Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме

Над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме, удобно производить умножение и деление, возведение в натуральную степень и извлечение корня.

Пусть даны два комплексных числа в тригонометрической форме $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, тогда

1) $z_1 z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$;

2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.

Если $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то

3) $z = (\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$;

4) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{\rho}(\cos\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n})$,

где $\sqrt[n]{\rho}$ - арифметический корень, k=0, 1, 2, …, n-1.

Действия над комплексными числами, заданными в показательной форме

Над комплексными числами, заданными в показательной форме, также и как над комплексными числами в тригонометрической форме, удобно производить умножение и деление, возведение в натуральную степень и извлечение корня.

Пусть даны два комплексных числа в показательной форме $z_1 = \rho_1 \cdot e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = \rho_2 \cdot e^{i\varphi_2}$, тогда

1) $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$;

2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$.

Если $z = \rho \cdot e^{i\varphi}$, то

3) $z^n = \rho^n \cdot e^{in\varphi}$;

4) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho \cdot e^{i\varphi}} = \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i\frac{\varphi + 2\pi k}{n}}$, где $\sqrt[n]{\rho}$ - арифметический корень, k=0, 1, 2, …, n-1.

2. Решение типовых примеров

Выполнить действия:

1) Дано: $z_1 = -1 + 6i$ и $z_2 = 2 + 5i$.

Пример выполнения:

1) $z_1 + z_2 = -1 + 2 + (6+5)i = 1 + 11i$;

2) $z_1 - z_2 = -1 - 2 + (6-5)i = -3 + i$;

3) $z_1 z_2 = (-1+6i)\cdot(2+5i) = -2 - 5i + 12i + 30i^2 = -2 + 7i - 30 = -32 + 7i$;

4)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-1+6i}{2+5i} = \frac{(-1+6i)(2-5i)}{(2+5i)(2-5i)} = \frac{-2+5i+12i-30i^2}{4-25i^2} = \frac{-2+17i+30}{4+25} = \frac{28+17i}{29} = \frac{28}{29} + \frac{17}{29}i.$$

2) Дано: $z_1 = 2(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$ и $z_2 = 4(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$.

Пример выполнения:

1) $z_1 z_2 = 2\cdot 4(\cos(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2})) = 8(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})$;

2) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{4}(\cos(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2})) = \frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$;

3) $z_1^4 = 2^4(\cos(4\cdot\frac{3\pi}{4}) + i\sin(4\cdot\frac{3\pi}{4})) = 16(\cos 3\pi + i\sin 3\pi) = 16(\cos(2\pi+\pi) + i\sin(2\pi+\pi)) =$
$= 16(\cos\pi + i\sin\pi)$;

4) $\sqrt[4]{z_1} = \sqrt[4]{2(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})} = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{4})$, где $k = 0, 1, 2, 3$.

При $k = 0, 1, 2, 3$ получим

$$z_0 = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{3\pi}{16} + i\sin\frac{3\pi}{16});$$

$$z_1 = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi}{4}) = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{11\pi}{16} + i\sin\frac{11\pi}{16});$$

$$z_2 = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{\frac{3\pi}{4} + 4\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{4} + 4\pi}{4}) = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{19\pi}{16} + i\sin\frac{19\pi}{16});$$

$$z_3 = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{\frac{3\pi}{4} + 6\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{4} + 6\pi}{4}) = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{27\pi}{16} + i\sin\frac{27\pi}{16}).$$

3) Дано: $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ и $z_2 = e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

Пример выполнения:

1) $z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot 1 e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{6})} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$;

2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{5\pi}{6}}} = 2e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{6})} = 2e^{i(-\frac{3\pi}{6})} = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$;

3) $z_1^4 = 2^4 e^{i(4\cdot\frac{\pi}{3})} = 4\sqrt{2}e^{i\frac{15\pi}{4}} = 16e^{i\frac{4\pi}{3}}$;

4) $\sqrt[4]{z_1} == \sqrt[4]{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{4}}$, $k = 0, 1, 2, 3$.

При $k = 0, 1, 2, 3$ получим

$z_0 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$;

$z_1 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi}{4}} = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$;

$z_2 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\frac{\pi}{3}+4\pi}{4}} = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{13\pi}{12}}$;

$z_3 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\frac{\pi}{3}+6\pi}{4}} = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{19\pi}{12}}$.

3. Выполнение аудиторных заданий

Произвести действия над комплексными числами в соответствии с номером варианта:

Номер варианта	Комплексные числа	Комплексные числа
1	$z_1 = 2+i$ $z_2 = 3-2i$	$z_1 = 4(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$ $z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$, $n = 3$
2	$z_1 = 3(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$, $n = 4$ $z_2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$	$z_1 = 5+2i$ $z_2 = 3-4i$
3	$z_1 = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$ $z_2 = 3{,}2e^{i\frac{4\pi}{3}}$, $n = 3$	$z_1 = 2+i$ $z_2 = 4-3i$
4	$z_1 = 2-7i$ $z_2 = 3+5i$	$z_1 = 2e^{i\frac{5\pi}{4}}$ $z_2 = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$, $n = 4$

5	$z_1 = 2\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})$ $z_2 = 2(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$, $n = 4$	$z_1 = 2 + 3i$ $z_2 = 3 - 2i$
6	$z_1 = 8e^{i\frac{5\pi}{3}}$ $z_2 = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $n = 3$	$z_1 = 5e^{i\frac{\pi}{4}}$ $z_2 = 0{,}2e^{i\frac{\pi}{6}}$, $n = 4$
7	$z_1 = 3 - 4i$ $z_2 = 10 + 5i$	$z_1 = 6(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})$ $z_2 = 3(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$, $n = 3$
8	$z_1 = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$ $z_2 = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$, $n = 3$	$z_1 = 1 - 2i$ $z_2 = 2 + i$
9	$z_1 = 1{,}6e^{i\frac{5\pi}{4}}$ $z_2 = 6e^{2\pi i}$, $n = 4$	$z_1 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}$ $z_2 = \sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{12}) + i\sin(-\frac{\pi}{12}))$, $n = 3$
10	$z_1 = 1 + i$ $z_2 = 2 - i$	$z_1 = 3(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ $z_2 = \sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$, $n = 4$
11	$z_1 = 15(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$ $z_2 = 4(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6})$, $n = 3$	$z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}$ $z_2 = 4e^{i\frac{\pi}{12}}$, $n = 3$
12	$z_1 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$ $z_2 = 6e^{i\frac{7\pi}{4}}$, $n = 4$	$z_1 = 4 + 3i$ $z_2 = 3 - 4i$
13	$z_1 = 1 - i$ $z_2 = 4 + 2i$	$z_1 = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$ $z_2 = 4e^{i\frac{7\pi}{6}}$, $n = 4$
14	$z_1 = 2\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$ $z_2 = \sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))$, $n = 4$	$z_1 = 4e^{i\frac{7\pi}{6}}$ $z_2 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $n = 3$

15	$z_1 = 4e^{i\frac{11\pi}{6}}$, $n=3$ $z_2 = 3{,}2e^{i\frac{7\pi}{6}}$	$z_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$, $n=4$ $z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

Приложение

4. Самостоятельная работа по теме Практического занятия №4 «Действия над комплексными числами».

Самостоятельная работа по теме занятия включает в себя:

- Изучение теоретического материала лекционных занятий, учебной литературы, Интернет-ресурсов, раздела «Краткие сведения из теории» настоящего описания ПЗ;
- Выполнения практических заданий и решение задач.

Задачи и практические задания:

Самостоятельная работа.

Базовый уровень сложности

1. Выполнить действия над комплексными числами в алгебраической форме:
   1) (4-3i)+(-2+3i);
   2) (5+6i)-(7-6i);
   3) (2+3i)(6-5i);
   4) $\frac{4+3i}{3-4i}$.

2. Выполнить действия над комплексными числами в тригонометрической форме:
   1) $3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$;
   2) $\frac{4\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)}{\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}}$;
   3) Вычислить z^4, если $z = 6\left(\cos\frac{7\pi}{8} + i\sin\frac{7\pi}{8}\right)$;
   4) Вычислить $\sqrt[4]{z}$,если $z = 1 - i\sqrt{3}$.

3. Выполнить действия над комплексными числами в показательной форме:
   1) $2e^{i\frac{7\pi}{18}}\cdot 3e^{i\frac{11\pi}{18}}$;

2) $\frac{4e^{i\frac{5\pi}{9}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{9}}}$;

3) $\left(\sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{9}}\right)^3$;

4) $\sqrt{2e^{i\frac{\pi}{3}}}$.

Повышенной уровень сложности

Вариант 1.

1. Записать комплексные числа в тригонометрической и в показательной формах:
а) $z = -2 - 2i$;

б) $z = 3$.

2. Представьте в алгебраической и показательной формах комплексные числа:
а) $z = 10(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3})$;

б) $z = 8(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4})$.

3. Даны комплексные числа $z_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ и $z_2 = 5(\cos\pi + i\sin\pi)$.
Найти: а) $z_1 \cdot z_2$; б) $\frac{z_1}{z_2}$; в) z_2^4; *г)* $\sqrt[3]{z_1}$.

Вариант 2.

1. Записать комплексные числа в тригонометрической и в показательной формах:
а) $z = -2i$;

б) $z = -3\sqrt{3} + 3i$.

2. Представьте в алгебраической и показательной формах комплексные числа:
а) $z = 4(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2})$;

б) $z = (\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)$.

3. Даны комплексные числа $z_1 = 0{,}5\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ и $z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$.
Найти: а) $z_1 \cdot z_2$; б) $\frac{z_1}{z_2}$; в) z_2^4; *г)* $\sqrt[3]{z_1}$.

Контрольные вопросы по теме.

1. Как записывается комплексное число в тригонометрической форме?
   Как записывается комплексное число в показательной форме? Формула Эйлера.

2. Сформулируйте правило перехода от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической и обратно.
3. Сформулируйте правило перехода от алгебраической формы комплексного числа к показательной и обратно.
4. Как перейти от тригонометрической формы комплексного числа к показательной и обратно.
5. Как умножаются комплексные числа, записанные в тригонометрической форме.
6. Как умножаются комплексные числа, записанные в показательной форме?
7. Сформулируйте правило деления комплексных чисел в тригонометрической форме.
8. Сформулируйте правило деления комплексных чисел в показательной форме.
9. Как возвести в степень комплексное число, записанное в тригонометрической форме.
10. Как возвести в степень комплексное число, записанное в показательной форме?
11. Сформулируйте правило извлечения корня n –й степени из комплексного числа, записанного в тригонометрической форме.
12. Сформулируйте правило извлечения корня n –й степени из комплексного числа, записанного в показательной форме.
13. Сколько значений имеет корень n-й степени из комплексного числа?

5. Практическое занятие № 5

ПЕРЕХОД ОТ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ФОРМЫ ЗАПИСИ К ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ И ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ И ОБРАТНО

Цель практического занятия: В соответствии с рабочей программой по дисциплине «Математика» в результате изучения обязательной части цикла обучающийся должен:

уметь:

- применять методы теории комплексных чисел;

знать:

- основные методы теории комплексных чисел;

Таким образом, студент во время проведения Практического занятия и самостоятельной работы по теме должен:

а) приобрести понятия и знания основ теории комплексных чисел,

б) приобрести навыки и умения перевода комплексных чисел из тригонометрической и показательной форм в алгебраическую и наоборот.

1. Краткие сведения из теории

Перевод комплексных чисел из алгебраической формы записи в тригонометрическую и показательную

Для того чтобы перейти от алгебраической формы записи комплексного числа $z = a + bi$ к тригонометрической достаточно найти его модуль и один из аргументов. Модуль определяется по формуле

$$r=\sqrt{a^2+b^2}\ .$$

Зная модуль **r**, аргумент находим из системы

$$\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{a}{r}\\ \sin\varphi=\dfrac{b}{r}\end{cases}.$$

Перевод комплексных чисел из тригонометрической и показательной форм записи в алгебраическую

Для того чтобы перейти от тригонометрической формы записи комплексного числа $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ или от показательной $z=r\,e^{i\varphi}$ к алгебраической достаточно найти его действительную и мнимую части из системы

$$\begin{cases}a=r\cos\varphi\\ b=r\sin\varphi\end{cases}$$

2. Решение типовых примеров

1) Выполнить действия:

1) Дано: $z_1=-8+6i$.

Пример выполнения:

$$a_1=-8$$
$$b_1=6$$
$$r_1=\sqrt{(-8)^2+6^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10$$
$$\cos\varphi=-\frac{8}{10}=-\frac{4}{5}$$
$$\sin\varphi=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$
$$\varphi=\pi-arctg\left|\frac{b}{a}\right|=\pi-arctg\left|-\frac{6}{8}\right|=\pi-arctg\,\frac{3}{4}$$
$$z_1=-8+6i=10\left(\cos\left(\pi-arctg\,\frac{3}{4}\right)+i\sin\left(\pi-arctg\,\frac{3}{4}\right)\right)=10\,e^{i\left(\pi-arctg\frac{3}{4}\right)}$$

2) Дано: $z_2=0.2\,e^{i\frac{\pi}{6}}$

Пример выполнения:

$r_2 = 0.2$

$\varphi_2 = \dfrac{\pi}{6}$

$a_2 = 0.2 \cdot \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{2}{10} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{10}$

$b_2 = 0.2 \cdot \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{2}{10} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{10}$

$z_2 = 0.2e^{i\frac{\pi}{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{10} + \dfrac{1}{10}i$

3) Дано: $z_3 = 2(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3})$

Пример выполнения:

$r_3 = 2$

$\varphi_3 = \dfrac{\pi}{3}$

$a_3 = 2 \cdot \cos\dfrac{\pi}{3} = 2 \cdot \dfrac{1}{2} = 1$

$b_3 = 2 \cdot \sin\dfrac{\pi}{3} = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$z_3 = 2(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}) = 1 + i\sqrt{3}$

3. Выполнение аудиторных заданий

Произвести действия над комплексными числами в соответствии с номером варианта:

Номер варианта	Комплексные числа	Комплексные числа
1	$z_1 = 1 + i$ $z_2 = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$	$z_1 = 2i$ $z_2 = 6e^{\frac{7\pi}{4}}$
2	$z_1 = 2$ $z_2 = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$	$z_1 = -1 + i$ $z_2 = 4\left(\cos\dfrac{7\pi}{6} + i\sin\dfrac{7\pi}{6}\right)$
3	$z_1 = -4 - 3i$ $z_2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$	$z_1 = -2$ $z_2 = 4e^{i\frac{11\pi}{6}}$

4	$z_1=-3i$ $z_2=8e^{i\frac{5\pi}{3}}$	$z_1=-1+\sqrt{3}i$ $z_2=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$
5	$z_1=1-i$ $z_2=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$	$z_1=3i$ $z_2=2e^{i\frac{7\pi}{6}}$
6	$z_1=-5$ $z_2=4e^{i\frac{2\pi}{3}}$	$z_1=8+6i$ $z_2=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$
7	$z_1=1+\sqrt{3}i$ $z_2=2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$	$z_1=1$ $z_2=2e^{i\frac{5\pi}{4}}$
8	$z_1=-2i$ $z_2=6e^{2\pi i}$	$z_1=8-6i$ $z_2=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$
9	$z_1=-1-i$ $z_2=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$	$z_1=-i$ $z_2=4e^{i\frac{\pi}{2}}$
10	$z_1=3$ $z_2=2e^{i\frac{3\pi}{4}}$	$z_1=-8-6i$ $z_2=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$
11	$z_1=-1-\sqrt{3}i$ $z_2=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$	$z_1=5$ $z_2=5e^{i\frac{\pi}{4}}$
12	$z_1=i$ $z_2=3e^{i\frac{4\pi}{3}}$	$z_1=-4+3i$ $z_2=4\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$
13	$z_1=3-4i$ $z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$	$z_1=-5i$ $z_2=3e^{i\frac{\pi}{6}}$
14	$z_1=-6$ $z_2=4e^{i\frac{\pi}{3}}$	$z_1=1-\sqrt{3}i$ $z_2=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$

15	$z_1 = -1 - 2i$ $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$	$z_1 = 7$ $z_2 = 9e^{i\pi}$

Приложение

4. Самостоятельная работа по теме Практического занятия №5 «Переход от алгебраической формы записи к тригонометрической и показательной и обратно»

Самостоятельная работа по теме занятия включает в себя:

- Изучение теоретического материала лекционных занятий, учебной литературы, Интернет-ресурсов, раздела «Краткие сведения из теории» настоящего описания ПЗ;
- Выполнения практических заданий и решение задач.

Задачи и практические задания:

Базовыйуровеньсложности

1. Записать число в тригонометрической и показательной формах:

$$z_1 = -1 + i;$$
$$z_2 = \sqrt{3} - i;$$
$$z_3 = -3 + 4i;$$
$$z_4 = 6i.$$

2. Записать число в алгебраической и показательной формах:

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right);$$

$$z_2 = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

3. Записать число в алгебраической и тригонометрической формах:

$$z_1 = 3e^{i\frac{2\pi}{3}};$$
$$z_2 = 5e^{-i\frac{\pi}{2}};$$
$$z_3 = \sqrt{2}e^{i\pi}.$$