МИНИСТЕРСТВО ЦИФРОВОГО РАЗВИТИЯ,
СВЯЗИ И МАССОВЫХ КОММУНИКАЦИЙ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ ИМ. ПРОФ. М.А. БОНЧ-БРУЕВИЧА»
(СПбГУТ)

Санкт-Петербургский колледж телекоммуникаций им. Э.Т. Кренкеля

СПбГУТ)))
Документ подписан простой электронной подписью
Сертификат: 008a56eb36a1808f06
Владелец: Машков Георгий Михайлович
Действителен с 07.05.2022 по 06.05.2027

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора
по учебной работе
Ка Н.В. Калинина
17 марта 2022 г

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

по учебной дисциплине
ОУД.04. МАТЕМАТИКА

по специальности
10.02.04 Обеспечение информационной безопасности телекоммуникационных систем

среднего профессионального образования

Санкт-Петербург
2022

ОУД.04 Математика. Методические указания по выполнению практических работ.
Составил к.ф.-м.н. Г.В. Линц. – Санкт-Петербург, 2022.

Методические указания содержат описания практических занятий, предусмотренных рабочей программой **ОУД.04 Математика**. Каждая работа рассчитана на 2 академических часа, общий объём составляет 24 часа. Нумерация рисунков, формул и таблиц в пределах одной работы. Методические указания предназначены для обучающихся очной формы обучения по специальности 10.02.04 Обеспечение информационной безопасности телекоммуникационных систем.

Рассмотрено и одобрено предметной (цикловой) комиссией Математических и естественно-научных дисциплин Санкт-Петербургского колледжа телекоммуникаций им. Э.Т. Кренкеля.

СОДЕРЖАНИЕ

Практическое занятие 1
ВЫЧИСЛЕНИЕ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Цель практического занятия: закрепить теоретический материал и выработать навыки выполнения операций сложения, вычитания, умножения и деления над обыкновенными и десятичными дробями при вычислении арифметических выражений.

Подготовка к работе:

Изучение теоретического материала лекционных занятий, учебной литературы, Интернет-ресурсов, раздела « Краткие сведения из теории» настоящего описания ПЗ;

Задание:

Выполнение задания в соответствии с номером варианта

1. Вычислите арифметическое выражение:

№ варианта	Арифметическое выражение
1	$\left(\frac{(2{,}7-0{,}8)\cdot 2\frac{1}{3}}{(5{,}2-1{,}4):\frac{3}{70}}+0{,}125\right):2\frac{1}{2}+0{,}43$
2	$\frac{2\frac{3}{4}:1{,}1+3\frac{1}{3}}{2{,}5-0{,}4\cdot 3\frac{1}{3}}:\frac{5}{7}-\frac{\left(2\frac{1}{6}+4{,}5\right)\cdot 0{,}375}{2{,}75-1\frac{1}{2}}$
3	$\frac{\left(13{,}75+9\frac{1}{6}\right)\cdot 1{,}2}{\left(10{,}3-8\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{5}{9}}+\frac{\left(6{,}8-3\frac{3}{5}\right)\cdot 5\frac{5}{6}}{\left(3\frac{2}{3}-3\frac{1}{6}\right)\cdot 56}-27\frac{1}{6}$
4	$\frac{\left(\frac{1}{6}+0{,}1+\frac{1}{15}\right):\left(\frac{1}{6}+0{,}1-\frac{1}{15}\right)\cdot 2{,}52}{\left(0{,}5-\frac{1}{3}+0{,}25-\frac{1}{5}\right):\left(0{,}25-\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{7}{13}}$
5	$\left(\frac{3\frac{1}{3}+2{,}5}{2{,}5-1\frac{1}{3}}\cdot\frac{4{,}6-2\frac{1}{3}}{4{,}6+2\frac{1}{3}}\cdot 5{,}2\right):\left(\frac{0{,}05}{\frac{1}{7}-0{,}125}+5{,}7\right)$
6	$\frac{0{,}4+8\left(5-0{,}8\cdot\frac{5}{8}\right)-5:2\frac{1}{2}}{\left[1\frac{7}{8}\cdot 8-\left(8{,}9-2{,}6:\frac{2}{3}\right)\right]\cdot 34\frac{2}{5}}\cdot 90$
7	$\frac{\left(5\frac{4}{45}-4\frac{1}{6}\right):5\frac{8}{15}}{\left(4\frac{2}{3}+0{,}75\right)\cdot 3\frac{9}{13}}\cdot 34\frac{2}{7}+\frac{0{,}3:0{,}01}{70}+\frac{2}{7}$

8	$\frac{\left(\frac{3}{5}+0,425-0,005\right):0,1}{30,5+\frac{1}{6}+3\frac{1}{3}}+\frac{6\frac{3}{4}+5\frac{1}{2}}{26:3\frac{5}{7}}-0,05$
9	$\frac{3\frac{1}{3}\cdot 1,9+19,5:4\frac{1}{2}}{\frac{62}{75}-0,16}:\frac{3,5+4\frac{2}{3}+2\frac{2}{15}}{0,5\left(1\frac{1}{20}+4,1\right)}$
10	$\frac{\left[1\frac{1}{5}:\left(\frac{17}{40}+0,6-0,005\right)\right]\cdot 1,7}{\frac{5}{6}+1\frac{1}{3}-1\frac{23}{30}}+\frac{4,75+7\frac{1}{2}}{33:4\frac{5}{7}}:0,25$
11	$\frac{\left(1,88+2\frac{3}{25}\right)\cdot\frac{3}{16}}{0,625-\frac{13}{18}:\frac{26}{9}}+\frac{\left(\frac{0,216}{0,15}+0,56\right):0,5}{\left(7,7:24\frac{3}{4}+\frac{2}{15}\right)\cdot 4,5}$
12	$\frac{0,128:3,2+0,86}{\frac{5}{6}\cdot 1,2+0,8}\cdot\frac{\left(1\frac{32}{63}-\frac{13}{21}\right)\cdot 3,6}{0,505\cdot\frac{2}{5}-0,002}$
13	$\frac{3\frac{1}{3}:10+0,175:0,35}{1,72-1\frac{11}{17}\cdot\frac{51}{56}}-\frac{\left(\frac{11}{18}-\frac{1}{15}\right):1,4}{\left(0,5-\frac{1}{9}\right)\cdot 3}$
14	$\frac{0,125:0,25+1\frac{9}{16}:2,5}{(10-22:2,3)\cdot 0,46+1,6}+\left(\frac{17}{20}+1,9\right)\cdot 0,5$
15	$\frac{(3,4-1,275)\cdot\frac{16}{17}}{\frac{5}{18}\cdot\left(1\frac{7}{85}+6\frac{2}{17}\right)}+0,5\cdot\left(2+\frac{12,5}{5,75+\frac{1}{2}}\right)$

2. Найдите значение выражения, содержащего бесконечную периодическую дробь:

№ варианта	Арифметическое выражение
1, 6, 11	$\frac{\left(\frac{5}{8}+2,708333...\right):2,5}{\left(1,3+0,7(6)+0,(36)\right)\cdot\frac{110}{401}}\cdot\frac{1}{2}$
2, 7, 12	$\frac{0,8333...-0,4(6)}{1\frac{5}{6}}\cdot\frac{1,125+1,75-0,41(6)}{0,59}$

3, 8,13	$\dfrac{\left(2\frac{38}{45}-\frac{1}{15}\right):13\frac{8}{9}+3\frac{3}{65}\cdot 0,(26)}{(18,5-13,777...)\frac{1}{85}}\cdot 0,5$
4, 9, 14	$\dfrac{\left(0,(6)+\frac{1}{3}\right):0,25}{0,12(3):0,0925}+12,5\cdot 0,64$
5, 10,15	$\dfrac{0,5+\frac{1}{4}+0,1(6)+0,125}{0,333...+0,4+\frac{14}{15}}+\dfrac{(3,75-0,625)\cdot\frac{48}{125}}{12,8\cdot 0,25}$

3. Найдите x из пропорции:

№ варианта	Пропорция
1, 8, 15	$\dfrac{\left(4-3,5\left(2\frac{1}{7}-1\frac{1}{5}\right)\right):0,16}{x}=\dfrac{3\frac{2}{7}-\frac{3}{14}:\frac{1}{6}}{41\frac{23}{84}-40\frac{49}{60}}$
2, 9	$\dfrac{1,2:0,375-0,2}{6\frac{4}{25}:15\frac{2}{5}+0,8}=\dfrac{0,016:0,12+0,7}{x}$
3, 10	$\dfrac{0,125x}{\left(\frac{19}{24}-\frac{21}{40}\right)\cdot 8\frac{7}{16}}=\dfrac{\left(1\frac{28}{63}-\frac{17}{21}\right)\cdot 0,7}{0,675\cdot 2,4-0,02}$
4, 11	$\dfrac{x}{\frac{0,1:0,05}{90}+\frac{2}{9}}=\dfrac{14+\frac{7}{4}}{\frac{25}{2}-\frac{184}{15}}$
5, 12	$\dfrac{17,7-2,6:\frac{4}{3}}{x}=\dfrac{5-\frac{4}{5}\cdot 0,625}{\left(\frac{23}{5}+\frac{7}{3}\right):\frac{26}{15}}$
6, 13	$\dfrac{9\left(\frac{108}{75}+0,56\right)}{5x}=\dfrac{0,28:\frac{5}{6}-\frac{4}{25}}{\frac{33}{2}-\frac{124}{9}}$
7, 14	$\dfrac{\left(\frac{94}{50}+\frac{53}{25}\right)\cdot\frac{3}{16}}{\frac{5}{12}-\frac{13}{18}\cdot\frac{3}{26}}=\dfrac{x}{\frac{2}{15}+7,7:\frac{99}{4}}$

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомиться с методическими указаниями;

2. Выбрать свой вариант;
3. Выполнить задания.

Содержание отчета:

Подробное решение заданий в соответствии с номером варианта представить в рабочих тетрадях;

Приложение

1. Краткие сведения из теории

Определение. Одна или несколько равных частей единицы называется **обыкновенной дробью.**

Определение. Дробь, в которой числитель меньше знаменателя, называют **правильной дробью**. Дробь, в которой числитель больше знаменателя или равен ему, называют **неправильной дробью**.

Правильная дробь меньше единицы, а неправильная дробь больше или равна единице.

Число, состоящее из целой и дробной частей, можно обратить в неправильную дробь:

$$a\frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c}.$$

Пример. $5\frac{4}{7} = \frac{5\cdot 7+4}{7} = \frac{39}{7}$

Для того чтобы из неправильной дроби выделить целую часть, нужно разделить с остатком числитель на знаменатель. Частное от деления будет целой частью числа, остаток – числителем, а делитель – знаменателем.

Определение. Десятичной дробью называют обыкновенную дробь, знаменать которой равен 10, 100, 1000 и т.д.

Пример. $\frac{35}{1000} = 0{,}035$

Арифметические операции над обыкновенными дробями

Правило 1. При сложении (вычитании) дробей с одинаковыми знаменателями к числителю первой дроби прибавляют числитель второй дроби (из числителя первой дроби вычитают числитель второй дроби).

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{\mathrm{a} \pm \mathrm{c}}{b}$$

Правило 2. При сложении (вычитании) дробей с различными знаменателями нужно привести их в наименьшему общему знаменателю, затем сложить (вычесть) полученные дроби, используя правило сложения (вычитания) дробей с одинаковыми знаменателями. Полученную дробь, если можно сократить и исключить из нее целую часть.

Правило 3. При умножении двух дробей получается дробь, числитель которой равен произведению числителей, а знаменатель – произведению знаменателей исходных дробей.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Правило 4. При делении дроби на дробь числитель делимого умножают на знаменатель делителя, а знаменатель делимого – на числитель делителя. Первое произведение служит числителем, а второе – знаменателем частного.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

Замечание. Если производится умножение или деление смешанных дробей, то их предварительно следует перевести в неправильные.

Арифметические операции над десятичными дробями.

Правило 1. При сложении (вычитании) десятичных дробей числа записывают так, чтобы одинаковые разряды были записаны один под другим, а запятая – под запятой, и складывают (вычитают) как натуральные числа.

Пример. $$\begin{array}{r} -\begin{array}{r} 16{,}200 \\ 4{,}752 \end{array} \\ \hline 11{,}448 \end{array}$$

Правило 2. При умножении двух десятичных дробей нужно выполнить умножение, не обращая внимание на запятые, и в полученном произведении отделить справа запятой столько цифр, сколько их стоит после запятой в обоих множителях вместе.

Правило 3. Чтобы разделить число на десятичную дробь, нужно в делимом и делителе перенести запятую вправо на столько цифр, сколько их после запятой в делителе, а потом выполнить деление на натуральное число.

Обращение десятичной дроби в обыкновенную и обыкновенной в десятичную.

Правило 1. Чтобы обратить десятичную дробь в обыкновенную, нужно в числителе дроби записать число, стоящее после запятой, а в знаменателе – единицу с нулями, причем нулей столько, сколько цифр справа от запятой.

Пример. $0{,}045 = \dfrac{45}{1000} = \dfrac{9}{200}$.

Правило 2. Чтобы обратить обыкновенную дробь в десятичную, следует разделить числитель на знаменатель по правилу деления десятичной дроби на целое число.

Пример.

$$\begin{array}{r|l} 7{,}0 & 25 \\ \underline{50} & \overline{0{,}28} \\ -\underline{200} & \\ \underline{200} & \\ 0 & \end{array}$$

Правило 3. Чтобы обратить периодическую дробь в обыкновенную, надо из числа, стоящего до второго периода, вычесть число, стоящее до первого периода, и записать эту разность числителем, а в знаменателе написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде, и после девяток дописать столько нулей, сколько цифр между запятой и первым периодом.

Пример: $$2{,}1(34) = \frac{2134-21}{990} = \frac{2113}{990}.$$

Пропорция и ее свойства.

Определение. **Пропорцией** называется равенство двух отношений, т. е. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, где a и d называются крайними членами, b и c – средними членами пропорции.

Свойства.

1°. Произведение крайних членов пропорции равно произведению средних, т. е. если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $ad = bc$.

2°. Если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$, $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$.

3°. Чтобы найти неизвестный средний (крайний) член пропорции, надо произведение крайних (средних) членов разделить на известный средний (крайний) член пропорции:

$$\text{если } \frac{a}{x} = \frac{b}{c}, \text{ то } x = \frac{ac}{b}.$$

2. Решение типового задания.

1. Вычислите арифметическое выражение:

$$\frac{\left(0{,}5:1{,}25+\frac{7}{5}:1\frac{4}{7}-\frac{3}{11}\right)\cdot 3}{\left(1{,}5+\frac{1}{4}\right):18\frac{1}{3}}$$

Решение:

1) $0{,}5:1{,}25 = 50:125 = 0{,}4$

2) $\frac{7}{5}:1\frac{4}{7} = \frac{7}{5}:\frac{11}{7} = \frac{7}{5}\cdot\frac{7}{11} = \frac{49}{55}$

3) $\frac{2}{5}+\frac{49}{55}-\frac{3}{11} = \frac{2\cdot 11}{5\cdot 11}+\frac{49}{55}-\frac{3\cdot 5}{11\cdot 5} = \frac{22+49-15}{55} = \frac{56}{55}$

4) $\frac{56}{55}\cdot 3=\frac{56\cdot 3}{55}$

5) $1{,}5+\frac{1}{4}=1{,}5+0{,}25=1{,}75$

6) $1{,}75=1\frac{75}{100}=1\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$

$\frac{7}{4}:18\frac{1}{3}=\frac{7}{4}:\frac{55}{3}=\frac{7}{4}\cdot\frac{3}{55}$

7) $\frac{56\cdot 3}{55}:\frac{7\cdot 3}{4\cdot 55}=\frac{56\cdot 3\cdot 4\cdot 55}{55\cdot 7\cdot 3}=\frac{8\cdot 4}{1}=\frac{32}{1}=32$

Ответ: $\{32\}$.

2. Найдите значение выражения, содержащего бесконечную периодическую дробь:
$\left(\frac{1}{2}+0{,}125-0{,}1666...\right)\cdot\left(6{,}4:26,(6)\right)+\frac{1}{8}$

Решение:

1) $\frac{1}{2}+0{,}125=0{,}5+0{,}125=0{,}625$

2) $0{,}166...=0{,}1(6)=\frac{16-1}{90}=\frac{15}{90}=\frac{1}{6}$

$0{,}625-\frac{1}{6}=\frac{625}{1000}-\frac{1}{6}=\frac{5}{8}-\frac{1}{6}=\frac{5\cdot 31\cdot 4}{24}=\frac{15-4}{24}=\frac{11}{24}$

3) $26,(6)=\frac{266-26}{9}=\frac{240}{9}=\frac{80}{3}$

4) $6{,}4:\frac{80}{3}=\frac{64}{10}:\frac{80}{3}=\frac{32}{5}\cdot\frac{3}{80}=\frac{2\cdot 3}{5\cdot 5}=\frac{6}{25}$

5) $\frac{11}{24}\cdot\frac{6}{25}=\frac{11}{4\cdot 25}=\frac{11}{100}=0{,}11$

6) $\frac{1}{8}=0{,}125$

$0{,}11+0{,}125=0{,}235$

Ответ: $\{0{,}235\}$.

4. Найдите x из пропорции:

$$\frac{7{,}5}{\left(6\frac{1}{3}-3{,}4\right)\cdot 2\frac{1}{4}}=\frac{1\frac{1}{3}+0{,}75}{x-1\frac{2}{3}}$$

Решение:

Сначала вычислим разность $6\frac{1}{3}-3{,}4=6\frac{1}{3}-3\frac{2}{5}=3+\frac{5-6}{15}=3-\frac{1}{15}=2\frac{14}{15}$ и

сумму $1\frac{1}{3}+0{,}75=1\frac{1}{3}+\frac{3}{4}=1+\frac{4+9}{12}=1+\frac{13}{12}=1+1\frac{1}{12}=2\frac{1}{12}$, затем по свойству пропорции получаем выражение, решая которое находим x.

$x-1\frac{2}{3}=2\frac{14}{15}\cdot 2\frac{1}{4}\cdot 2\frac{1}{12}:7{,}5$

$x-1\frac{2}{3}=2\frac{14}{15}\cdot 2\frac{1}{4}\cdot 2\frac{1}{12}:\frac{75}{10}$

$x-1\frac{2}{3}=\frac{44}{15}\cdot\frac{9}{4}\cdot\frac{25}{12}\cdot\frac{2}{15}$, сократив обыкновенные дроби, получаем:

$x-1\frac{2}{3}=\frac{11}{6}$

$x=1\frac{5}{6}+1\frac{2}{3}$

$x=2+\frac{5+4}{6}$

$x=2+\frac{9}{6}$

$x=2+1\frac{1}{2}$

$x=3\frac{1}{2}$, Ответ: $\{3{,}5\}$.

Практическое занятие №2

ВЫЧИСЛЕНИЕ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ,

СОДЕРЖАЩИХ СТЕПЕНИ И КОРНИ.

Цель практического занятия: закрепить теоретический материал и выработать практические умения вычисления арифметических выражений, содержащих степени и корни.

Подготовка к работе:

Изучение теоретического материала лекционных занятий, учебной литературы, Интернет-ресурсов, раздела « Краткие сведения из теории» настоящего описания ПЗ;

Задание:

Выполнение заданий в соответствии с номером варианта

Вариант 1	**Вариант 2**
1) Вычислите: $(\frac{1}{16})^{-\frac{3}{4}}+160000^{0,25}-(7\frac{19}{32})^{\frac{1}{5}}+2^0$	1) Вычислите: $(0{,}0001)^{-\frac{1}{4}}-2^{-2}\cdot 64^{\frac{2}{3}}-8^{-1\frac{1}{3}}$
2)Вычислите: $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}+\sqrt[4]{18}\cdot\sqrt[4]{4{,}5}-\sqrt{\sqrt{256}}$	2) Вычислите: $\sqrt[3]{15\frac{5}{8}}+\sqrt[3]{\sqrt[3]{9}}\cdot\sqrt[9]{3^7}-(\sqrt[8]{16})^4$
3) Вычислите: $\sqrt[3]{11-\sqrt{57}}\cdot\sqrt[3]{11+\sqrt{57}}$	3) Вычислите: $\frac{10^{2+\sqrt{7}}}{2^{2+\sqrt{7}}\cdot 5^{2+\sqrt{7}}}$
4)Сравните числа: à)$5^{\sqrt{15}}$è5^4 á)$\sqrt[5]{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}$ и $\sqrt[5]{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}}$	4)Сравните числа: à)$7{,}5^{\sqrt{65}}$ и $7{,}5^8$ á)$\sqrt[4]{(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})^3}$ и $\sqrt{(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})^3}$
5) Вычислите: $-0{,}3^0\cdot((\frac{6}{5})^{-4})^{-0,25}\cdot(0{,}36)^{-0,5}\cdot\sqrt{(0{,}0001)^{-1}}$	5) Вычислите: $(-0{,}2)^0\cdot((\frac{5}{6})^4)^{-0,25}\cdot(1{,}2)^{-1}\cdot\sqrt{(0{,}01)^{-3}}+(-1)^{2n}$

Вариант 3	**Вариант 4**
1) Вычислите: $(\frac{1}{2})^{-4}+25^{\frac{3}{2}}\cdot 25^{-1}-(2\frac{1}{4})^{-1,5}$	1) Вычислите: $\sqrt[4]{3^8\cdot 16}-\frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{-216}$
2)Вычислите: $\sqrt[5]{3^{10}\cdot 32}-\frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{-216}$	2)Вычислите: $27^{\frac{1}{3}}-(-2)^{-2}+(3\frac{3}{8})^{-\frac{1}{3}}+(2,7)^0$
3) Вычислите: $\frac{15^{3+\sqrt{5}}}{5^{3+\sqrt{5}}\cdot 3^{3+\sqrt{5}}}$	3) Вычислите: $\sqrt{17+\sqrt{33}}\cdot\sqrt{17-\sqrt{33}}$
4)Сравните числа: $\grave{a})(1,5)^5$ и $(1,5)^{\sqrt{24}}$ $\acute{a})\sqrt[3]{(\frac{1}{3}+\frac{1}{2})^3}$ и $\sqrt[3]{(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})^3}$	4)Сравните числа: $\grave{a})(2,5)^5$ и $(2,5)^{\sqrt{21}}$ $\acute{a})\sqrt[5]{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}$ и $\sqrt[5]{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}}$
5) Вычислите: $5\cdot(\frac{25}{36})^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2^{15}}\cdot(2^{\frac{3}{5}}\cdot 2^{\frac{2}{5}})^{15}-(-3)^3-289^{\frac{1}{2}}$	5) Вычислите: $-0,7^0\cdot(0,36)^{-0,5}\cdot((\frac{6}{5})^{-4})^{-0,25}\cdot 0,0001^{-0,5}$

Вариант 5	**Вариант 6**
1) Вычислите: $\sqrt[4]{18}\cdot\sqrt[4]{4\frac{1}{2}}-\sqrt{\sqrt{256}}+\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$	1) Вычислите: $\sqrt[3]{\sqrt[3]{9}}\cdot\sqrt[9]{3^7}-(\sqrt[8]{16})^4+\sqrt[3]{15\frac{5}{8}}$
2)Вычислите: $(0,0001)^{-\frac{1}{4}}-8^{-\frac{4}{3}}-2^{-2}\cdot 64^{\frac{2}{3}}$	2)Вычислите: $25^{\frac{3}{2}}\cdot 25^{-1}-(2\frac{1}{4})^{-1,5}+(\frac{1}{2})^{-4}$
3) Вычислите: $\frac{24^{1-\sqrt{7}}}{8^{1-\sqrt{7}}\cdot 3^{1-\sqrt{7}}}$	3) Вычислите: $\sqrt[6]{11-\sqrt{57}}\cdot\sqrt[6]{11+\sqrt{57}}$

4)Сравните числа: à) $10{,}3^{\sqrt{18}}$ и $10{,}3^{4}$ á) $\sqrt[3]{(\frac{1}{3}+\frac{1}{2})^{5}}$ и $\sqrt[3]{(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})^{5}}$	4)Сравните числа: à) $7{,}2^{\sqrt{12}}$ и $7{,}2^{3}$ á) $\sqrt{(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})^{3}}$ и $\sqrt{(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})^{3}}$
5) Вычислите: $(0{,}49^{-0{,}5}\cdot(1\frac{3}{4})^{2}+0{,}64^{-\frac{1}{2}})\sqrt{0{,}01^{-1}}\cdot 0{,}64\cdot(1\frac{1}{4})^{2}$	5) Вычислите: $5\cdot(\frac{25}{36})^{-\frac{1}{2}}-289^{\frac{1}{2}}-(-3)^{3}+\frac{1}{2^{15}}\cdot(2^{\frac{3}{5}}\cdot 2^{\frac{2}{5}})^{15}$

Вариант 7	**Вариант 8**
1) Вычислите: $(\sqrt[6]{7^{3}})^{2}+\frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}}+(\sqrt[3]{625}-\sqrt[3]{5}):\sqrt[3]{5}$	1) Вычислите: $25^{\frac{3}{2}}\cdot 25^{-1}-(2\frac{1}{4})^{-1{,}5}+(0{,}5)^{-4}$
2)Вычислите: $(1{,}5)^{0}+(\frac{1}{16})^{-\frac{3}{4}}+810000^{0{,}25}-(7\frac{19}{32})^{\frac{1}{5}}$	2)Вычислите: $(\sqrt[6]{7^{3}})^{2}+\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}-(\sqrt[3]{625}-\sqrt[3]{5}):\sqrt[3]{5}$
3) Вычислите: $\frac{6^{1+\sqrt{2}}\cdot 3^{1+\sqrt{2}}}{18^{1+\sqrt{2}}}$	3) Вычислите: $\frac{12^{2-\sqrt{3}}}{3^{2-\sqrt{3}}\cdot 4^{2-\sqrt{3}}}$
4) Сравните числа: à) $1{,}2^{5}$ и $1{,}2^{\sqrt{18}}$ á) $\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}$ и $\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}$	4) Сравните числа: à) $2{,}3^{7}$ и $2{,}3^{\sqrt{50}}$ á) $\sqrt[3]{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}$ и $\sqrt[3]{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}}$
5) Вычислите: $-0{,}03^{0}\cdot 1{,}2^{-1}\cdot\sqrt{(0{,}01)^{-3}}\cdot((\frac{5}{6})^{4})^{-0{,}25}$	5) Вычислите: $-0{,}5^{0}\cdot((\frac{6}{5})^{-4})^{0{,}25}\cdot\sqrt{0{,}0001^{-1}}\cdot(0{,}36)^{-\frac{1}{2}}$

Вариант 9	**Вариант10**

1) Вычислите: $0{,}8^2\cdot(1\frac{1}{4})^2\cdot(0{,}45^{-0{,}5}\cdot(1\frac{3}{4})^2+0{,}64^{-\frac{1}{2}})$	1) Вычислите: $27^{\frac{2}{3}}+(3\frac{3}{8})^{-\frac{1}{3}}-(-2)^{-2}-(2{,}4)^{-1}$
2)Вычислите: $\sqrt[4]{4\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[4]{18}-\sqrt{\sqrt{256}}+\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$	2)Вычислите: $\sqrt[3]{-216}+\sqrt[5]{3^{10}\cdot 32}-\frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3}}$
3) Вычислите: $\sqrt[4]{17-\sqrt{33}}\cdot\sqrt[4]{17+\sqrt{33}}$	3) Вычислите: $\sqrt[3]{11+\sqrt{57}}\cdot\sqrt[3]{11-\sqrt{57}}$
4) Сравните числа: à)$3{,}5^{\sqrt{27}}$ и $3{,}5^5$ á)$\sqrt[3]{(\frac{1}{3}+\frac{1}{2})^4}$ и $\sqrt[3]{(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})^4}$	4) Сравните числа: à)$4{,}2^3$ и $4{,}2^{\sqrt{10}}$ á)$\sqrt[5]{(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})^2}$ и $\sqrt[5]{(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})^2}$
5) Вычислите: $160000^{0{,}25}-3^0+(\frac{1}{16})^{-\frac{3}{4}}-(7\frac{19}{32})^{\frac{1}{5}}+\sqrt[3]{-(\frac{1}{27})^{-1}}$	5) Вычислите: $-2{,}7^0\cdot((\frac{5}{6})^4)^{-0{,}25}\cdot(1{,}2)^{-1}\cdot\sqrt{(0{,}01)^{-3}}$

Вариант11	**Вариант 12**
1) Вычислите: $(0{,}0001)^{-\frac{1}{4}}-2^{-2}\cdot 64^{\frac{2}{3}}-8^{-\frac{4}{3}}$	1) Вычислите: $0{,}5^{-4}-(2\frac{1}{4})^{-1{,}5}+2^{-2}\cdot 64^{\frac{2}{3}}$
2)Вычислите: $\sqrt[3]{15\frac{5}{8}}+\sqrt[3]{\sqrt[3]{9}}\cdot\sqrt[9]{3^7}-(\sqrt[8]{16})^4$	2)Вычислите: $\sqrt[3]{-216}-\frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2}}+\sqrt[5]{32\cdot 3^{10}}$
3) Вычислите $\frac{2^{\sqrt{3}-1}\cdot 9^{\sqrt{3}-1}}{18^{\sqrt{3}-1}}$	3) Вычислите: $\frac{2^{2+\sqrt{3}}\cdot 7^{2+\sqrt{3}}}{14^{2+\sqrt{3}}}$
4) Сравните числа:	4) Сравните числа:

$\grave{a})(\frac{8}{7})^2$ и $(\frac{8}{7})^{\sqrt{3}}$ $\acute{a})\sqrt[3]{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$ и $\sqrt[3]{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}$	$\grave{a})5{,}2^4$ и $5{,}2^{\sqrt{15}}$ $\acute{a})\sqrt[4]{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$ и $\sqrt[4]{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}$
5) Вычислите: $5\cdot(\frac{25}{36})^{-\frac{1}{2}}+(-1)^{12}+\frac{1}{2^{15}}\cdot(2^{\frac{3}{5}}\cdot 2^{\frac{2}{5}})-(-3)^3$	5) Вычислите: $(0{,}49^{-\frac{1}{2}}\cdot(1\frac{3}{4})^2+0{,}64^{-0,5})\cdot\sqrt{0{,}01^{-1}}\cdot(1\frac{1}{4})^2\cdot 0{,}8^2$

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомиться с методическими указаниями;
2. Выбрать свой вариант;
3. Решить задания.

Содержание отчета:

Подробное решение заданий в соответствии с номером варианта представить в рабочих тетрадях;

Приложение

1. Краткие сведения из теории

АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КОРЕНЬ НАТУРАЛЬНОЙ СТЕПЕНИ.

$\sqrt[n]{a}=b$, если $b^n=a$, ($a\ge 0$, $b\ge 0$, $\mathrm{n}\in\mathrm{N}, \mathrm{n}>1$).

СВОЙСТВА АРИФМЕТИЧЕСКОГО КОРНЯ:

$$\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b},\quad a\ge 0,\ b\ge 0,$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\quad a\ge 0,\ b>0,$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a},\quad a\ge 0,\quad m,n\in N, m>1, n>1,$$

$$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m},\quad a\ge 0.$$

СВОЙСТВА СТЕПЕНИ С РАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ:

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$(a^p)^q = a^{p\cdot q}$$

$$(a\cdot b)^p = a^p \cdot b^p$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$$

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

$$a^{\frac{1}{\mathrm{n}}} = \sqrt[n]{a}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \ ,$$

где $a;b-$ положительные действительные числа;

$p;q-$ рациональные числа.

2. Решение типовых примеров

1. $(3\frac{3}{8})^{-\frac{1}{3}} - (-2)^{-2} + 27^{\frac{2}{3}} + (0{,}15)^0 = (\frac{27}{8})^{-\frac{1}{3}} - (-\frac{1}{2})^2 + (3^3)^{\frac{2}{3}} + 1 = (\frac{8}{27})^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4} + 3^2 + 1 =$

$= (\frac{2^3}{3^3})^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4} + 10 = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + 10 = 10\frac{5}{12}$

2. $\frac{15^{\sqrt{5}}}{5^{2+\sqrt{5}} \cdot 3^{2+\sqrt{5}}} = \frac{15^{\sqrt{5}}}{(5\cdot 3)^{2+\sqrt{5}}} = \frac{15^{\sqrt{5}}}{15^2 \cdot 15^{\sqrt{5}}} = \frac{1}{225}$

3. $\sqrt{\sqrt[3]{64}} - (\sqrt[3]{625} - \sqrt[3]{5}) : \sqrt[3]{5} + (\sqrt[6]{7^3})^2 = \sqrt[6]{64} - (\frac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}} - 1) + \sqrt[6]{7^6} = \sqrt[6]{2^6} - (\sqrt[3]{125} - 1) + 7 =$

$= 2 - 4 + 7 = 5$

4. $\sqrt[4]{17-\sqrt{33}} \cdot \sqrt[4]{17+\sqrt{33}} = \sqrt[4]{(17-\sqrt{33})(17+\sqrt{33})} = \sqrt[4]{289-33} = \sqrt[4]{256} = 4$

Практическое занятие №3

РЕШЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Цель занятия: научиться применять свойства степени в преобразованиях показательных выражений, приобрести навыки и умения решения показательных уравнений различного типа.

Подготовка к работе:

Изучение теоретического материала лекционных занятий, учебной литературы, Интернет-ресурсов, раздела « Краткие сведения из теории» настоящего описания ПЗ;

Задание:

Выполнение заданий в соответствии с номером варианта

Вариант 1	**Вариант 2**
Решите уравнения:	Решите уравнения:
1. $4^{x^2+3x-4}=1$	1. $3^{x^2+x-12}=1$
2. $(0{,}5)^{5x}=8^{-3}$	2. $\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x}=8\sqrt{2}$
3. $2^{3x+6}=\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$	3. $27^{x-1}=9^x$
4. $25^x-6\cdot5^x+5=0$	4. $4^x-15\cdot2^x-16=0$
5. $4\cdot2^x+2^{x+3}=12$	5. $3^{x+3}+8\cdot3^{x+2}=33$
6. $18^x+12^x=2\cdot8^x$	6. $3\cdot9^x-4\cdot21^x-7\cdot49^x=0$

Вариант 3	**Вариант 4**
Решите уравнения:	Решите уравнения:
1. $5^{x^2-5x+6}=1$	1. $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3}=1$
2. $0{,}1^{5x-8x^2}=100$	2. $0{,}6^{x^2-x}=\left(\frac{3}{5}\right)^6$
3. $\left(\frac{7}{2}\right)^{x^2}=\left(\frac{2}{7}\right)^{4-5x}$	3. $7^{2x+1}-7^x=0$
4. $4^x-3\cdot2^x=4$	4. $25^x+4\cdot5^x-5=0$
5. $5\cdot9^x+9^{x-2}=406$	5. $5\cdot3^x+3^{x+1}=8$
6. $4\cdot81^x-12\cdot36^x+9\cdot16^x=0$	6. $4\cdot25^x-9\cdot20^x+5\cdot16^x=0$
Вариант 5	**Вариант 6**

Решите уравнения:	Решите уравнения:
1. $\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2+8x+15}=1$	1. $2^{x^2-8x+15}=1$
2. $2^{x^2-2x}=8$	2. $\left(\frac{1}{5}\right)^{x}=25\sqrt{5}$
3. $3^{x+20}-3^{x^2}=0$	3. $2^{x^2-4}=8^x$
4. $2\cdot 4^x+7\cdot 2^x=4$	4. $9^x-6\cdot 3^x-27=0$
5. $5^{x+2}-12\cdot 5^{x-1}=565$	5. $7^x+5\cdot 7^{x-2}=378$
6. $9\cdot 16^x+2\cdot 12^x-32\cdot 9^x=0$	6. $3\cdot 4^x+6^x-2\cdot 9^x=0$

Вариант 7	**Вариант 8**
Решите уравнения:	Решите уравнения:
1. $5^{x^2-6x+8}=1$	1. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+6x+5}=1$
2. $2^{x-1}=2\sqrt{2}$	2. $3^{x^2+x}=9$
3. $3^{8x^2+5x}=9^{x^2+4x}$	3. $5^{x^2-15}=25^x$
4. $\left(\frac{1}{36}\right)^x-5\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^x-6=0$	4. $\left(\frac{1}{49}\right)^x+6\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^x-7=0$
5. $2\cdot 5^x+5^{x+2}=27$	5. $5^x-9\cdot 5^{x-3}=580$
6. $2\cdot 4^x-3\cdot 10^x-5\cdot 25^x=0$	6. $18^x-8\cdot 6^x-9\cdot 2^x=0$

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомиться с методическими указаниями;
2. Выбрать свой вариант;
3. Решить задание и ответить на вопросы

Содержание отчета:

Подробное решение заданий в соответствии с номером варианта представить в рабочих тетрадях;

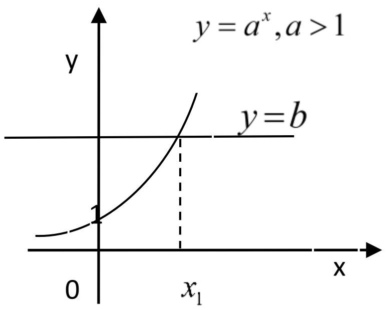
Приложение

1. Краткие сведения из теории

Показательными уравнениями называются уравнения, содержащие переменную в показателе степени, т.е. уравнения вида $a^{f(x)}=a^{\varphi(x)}$**,** где $a>0$ и $a\neq 1$ и уравнения, сводящиеся к уравнению указанного вида .

В основе решения показательных уравнений лежит следующая теорема:

Теорема. Показательное уравнение $a^{f(x)}=a^{\varphi(x)}$ ($a>0$ и $a\neq 1$) $\Leftrightarrow$ $f(x)=\varphi(x)$.



Простейшим показательным уравнением является уравнение вида $a^x = b$, где a>0 и $a \neq 1$.

Это уравнение можно решить графически (см. рис.).

При b<0 это уравнение на множестве действительных чисел R корней не имеет, так как a^x>0 для всех $x \in R$.

При решении показательных уравнений используются свойства показательной функции a^x, непосредственно вытекающие из ее определения и свойства степени с любым показателем.

При любых действительных значениях x_1 и x_2:

1. $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$
2. $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}$
3. $\dfrac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1-x_2}$
4. $a^0 = 1$
5. $a^1 = a$
6. $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

Некоторые типы показательных уравнений и приемы их решения, сводящие эти уравнения к простейшим.

1. Уравнение вида $a^{f(x)} = 1$ (a>0 , $a \neq 1$).

На основании равенства $a^0 = 1$ решение уравнения сводится к решению уравнения

f(x)=0, где *f(x)*- функция, определенная на множестве действительных чисел R. Решив последнее уравнение относительно x, найдем его корни, удовлетворяющие данному уравнению.

<u>Пример 1.</u> Решить уравнение $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{x-1} = 1$.

Решение: $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{x-1} = 1$ ОДЗ: $x \in R$

Представив 1 как $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{0}$, получим $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{x-1} = \left(\dfrac{4}{5}\right)^{0}$, т.е. левая и правая части уравнения приведены к одному основанию. Следовательно, данное уравнение равносильно линейному уравнению $x-1=0$, откуда $x = 1$.

Ответ: $\{1\}$.

2. Уравнение вида $a^{f(x)}=b$ **(**a**>0 ,** $a\neq 1$**,**b**>0,** $b\neq 1$**).**

Пример 2. Решить уравнение $3^{x^2-\frac{5}{7}x}=\sqrt[7]{9}$.

Решение: $3^{x^2-\frac{5}{7}x}=\sqrt[7]{9}$ ОДЗ: $x\in R$

Представив $\sqrt[7]{9}$ как $3^{\frac{2}{7}}$, получим $3^{x^2-\frac{5}{7}x}=3^{\frac{2}{7}}$, т.е. левая и правая части уравнения приведены к одному основанию. Следовательно, данное уравнение равносильно квадратному уравнению $x^2-\frac{5}{7}x=\frac{2}{7}$, откуда $x_1=-\frac{2}{7}$, $x_2=1$.

Ответ: $\left\{-\frac{2}{7};\ 1\right\}$.

3. Уравнение вида $a^{f(x)}=a^{\varphi(x)}$ **(**a**>0 ,** $a\neq 1$**).**

Левая и правая части уравнения приведены к одному основанию. Отсюда вытекает равенство показателей $f(x)=\varphi(x)$ и обратно, т.е. уравнение $a^{f(x)}=a^{\varphi(x)}\Leftrightarrow f(x)=\varphi(x)$, при условии, что $f(x)$ *è* $\varphi(x)$определены (ОДЗ).

Пример 3. Решить уравнение $4^x=8^{2x-3}$.

Решение: $4^x=8^{2x-3}$ ОДЗ: $x\in R$

Поскольку $\begin{matrix}4^x=\left(2^2\right)^x=2^{2x}\\ 8^{2x-3}=\left(2^3\right)^{2x-3}=2^{6x-9}\end{matrix}$, то $2^{2x}=2^{6x-9}\Leftrightarrow 2x=6x-9\Leftrightarrow 4x=9\Leftrightarrow x=\frac{9}{4}$.

Ответ: $\left\{2\frac{1}{4}\right\}$.

4. Уравнение вида $\mathrm{A}a^{2x}+Ba^x+C=0$ **(A,B,C- числа,** a**>0 ,** $a\neq 1$**).**

Такие уравнения с помощью подстановки $a^x=t>0$ сводятся к уравнению вида $\mathrm{A}t^2+B\mathrm{t}+C=0$ (приведение показательного уравнения к квадратному).

Пример 4. Решить уравнение $5^{2x-1}+5^{x+1}=250$.

Решение: $5^{2x-1}+5^{x+1}=250$ ОДЗ: $x\in R$

Запишем уравнение в виде: $5^{2x}\cdot 5^{-1}+5^x\cdot 5^1=250\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5}\cdot 5^{2x}+5\cdot 5^x=250.$$

Положим $5^x=t>0$, тогда после подстановки получим квадратное уравнение

$\frac{1}{5}\cdot t^2+5\cdot t=250$, которое имеет один положительный корень $t_1=25$(второй корень $t_2=-50<0$), значит, $5^x=25 \Leftrightarrow 5^x=5^2 \Leftrightarrow x=2$.

Ответ: $\{2\}$.

5. Уравнение вида $\text{A}a^{f(x)}+Ba^{\varphi(x)}=C$ **(A,B,C- числа,** a**>0 ,** $a\neq 1$**).**

При решении уравнений данного вида используется преобразование, состоящее в вынесении общего множителя за скобки.

Пример 5. Решить уравнение $5^{2x+1}-3\cdot 5^{2x-1}=550$.

Решение: $5^{2x+1}-3\cdot 5^{2x-1}=550$ ОДЗ: $x\in R$

Вынося в левой части уравнения выражение 5^{2x-1} за скобки, получаем

$$5^{2x-1}\left(5^2-3\right)=550 \Leftrightarrow 5^{2x-1}\cdot 22=550 \Leftrightarrow 5^{2x-1}=25 \Leftrightarrow 5^{2x-1}=5^2 \Leftrightarrow 2x-1=2 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}.$$

Ответ: $\left\{1\frac{1}{2}\right\}$.

6. Уравнение вида $\text{A}a^x+Bb^x=C$ **или** $\text{A}a^x+Bb^x=Cc^x$ (сводящееся к первому делением на $c^x\neq 0$).

Пример 6. Решить уравнение $2^{2x+2}-6^x-2\cdot 3^{2x+2}=0$.

Решение: $2^{2x+2}-6^x-2\cdot 3^{2x+2}=0$ ОДЗ: $x\in R$

Запишем уравнение в виде $2^{2x}\cdot 2^2-2^x\cdot 3^x-2\cdot 3^{2x}\cdot 3^2=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4\cdot 2^{2x}-2^x\cdot 3^x-18\cdot 3^{2x}=0.$$

Разделив обе части этого уравнения на $3^{2x}\neq 0$, получим $4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}-\left(\frac{2}{3}\right)^x-18=0.$

Пусть $\left(\frac{2}{3}\right)^x=t>0$, тогда после подстановки получим квадратное уравнение

$4t^2-t-18=0$, корни которого $t_1=-2<0, t_2=\frac{9}{4}>0$.Значит, $\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{9}{4} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \Leftrightarrow x=-2.$$

Ответ: $\{-2\}$.

2. Решение типовых примеров:

Вариант 0
Решите уравнения:
1. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-9x+8}=1$
2. $5^{7x-2}=\sqrt{\frac{1}{25}}$
3. $25^{-x+3}=\left(\frac{1}{5}\right)^{3x-1}$
4. $9^x-4\cdot 3^x+3=0$
5. $4^{x-1}+11\cdot 4^{x-2}=60$
6. $5\cdot 9^x+7\cdot 15^x-6\cdot 25^x=0$

Решите уравнения:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-9x+8}=1$

Решение: $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-9x+8}=1$ ОДЗ: $x\in R$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-9x+8}=\left(\frac{1}{3}\right)^{0} \Leftrightarrow x^2-9x+8=0$$

$$x^2-9x+8=0$$

$$D=(-9)^2-4\cdot 1\cdot 8=81-32=49$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=\frac{9+7}{2} \\ x_2=\frac{9-7}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=8 \\ x_2=1\end{array}\right.$$ (оба корня удовлетворяют ОДЗ).

Ответ: $\{1;\ 8\}$.

2) $5^{7x-2}=\sqrt{\frac{1}{25}}$

Решение: $5^{7x-2}=\sqrt{\frac{1}{25}}$ ОДЗ: $x\in R$

$$5^{7x-2}=\sqrt{\frac{1}{25}} \Leftrightarrow 5^{7x-2}=\left(\frac{1}{5}\right) \Leftrightarrow 5^{7x-2}=5^{-1} \Leftrightarrow 7x-2=-1 \Leftrightarrow 7x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{7}.$$

Ответ: $\left\{\frac{1}{7}\right\}$.

3) $25^{-x+3} = \left(\frac{1}{5}\right)^{3x-1}$

Решение: $25^{-x+3} = \left(\frac{1}{5}\right)^{3x-1}$ ОДЗ: $x \in R$

$(5^2)^{-x+3} = (5^{-1})^{3x-1} \Leftrightarrow 5^{-2x+6} = 5^{-3x+1} \Leftrightarrow -2x+6 = -3x+1 \Leftrightarrow -2x+3x = 1-6x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -5$.

Ответ: $\{-5\}$.

4) $9^x - 4\cdot 3^x + 3 = 0$

Решение: $9^x - 4\cdot 3^x + 3 = 0$ ОДЗ: $x \in R$

$t = 3^x, t > 0$

$t^2 - 4t + 3 = 0$

$D = (-4)^2 - 4\cdot 1\cdot 3 = 16 - 12 = 4$

$$t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \left[\begin{array}{l} t_1 = 3 > 0 \\ t_2 = 1 > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 3 \\ 3^x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 3^1 \\ 3^x = 3^0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{array}\right..$$

Ответ: $\{0;\ 1\}$.

5) $4^{x-1} + 11\cdot 4^{x-2} = 60$

Решение: $4^{x-1} + 11\cdot 4^{x-2} = 60$ ОДЗ: $x \in R$

$4^{x-2}(4+11) = 60$
$4^{x-2}\cdot 15 = 60$
$4^{x-2} = 4$
$x - 2 = 1$
$x = 3$

Ответ: $\{3\}$.

6) $5\cdot 9^x + 7\cdot 15^x - 6\cdot 25^x = 0$

Решение: $5\cdot 9^x + 7\cdot 15^x - 6\cdot 25^x = 0$ ОДЗ: $x \in R$

$5\cdot 9^x + 7\cdot 15^x - 6\cdot 25^x = 0 \quad (:25^x \neq 0)$

$$5\cdot\frac{9^x}{25^x}+7\cdot\frac{15^x}{25^x}-6\cdot\frac{25^x}{25^x}=0$$

$$5\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{2x}+7\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{x}-6=0$$

$$t=\left(\frac{3}{5}\right)^{x},t>0$$

$$5t^2+7t-6=0$$

$$D=7^2-4\cdot 5\cdot(-6)=49+120=169$$

$$t_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{169}}{10}=\frac{-7\pm 13}{10}=\left[\begin{array}{l} t_1=\dfrac{3}{5} \\ t_2=-2<0\end{array}\right. \Leftrightarrow \quad \left(\frac{3}{5}\right)^{x}=\frac{3}{5}\Leftrightarrow \ x=1.$$

Ответ: $\{1\}$.

Практическое занятие №4

РЕШЕНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Цель практического занятия: закрепить теоретический материал и выработать навыки и умения вычисления логарифмов, научиться применять формулы в преобразованиях логарифмических выражений и решать логарифмические уравнения.

Подготовка к работе:

Изучение теоретического материала лекционных занятий, учебной литературы, Интернет-ресурсов, раздела « Краткие сведения из теории» настоящего описания ПЗ;

Задание:

Выполнение заданий в соответствии с номером варианта

1 вариант	
1. Найдите значения выражения:	$3^{0,4\log_3(4\sqrt{2})}+4^{3-\log_4 64}-5,1^{\log_{5,1}9}$
2. Найдите значения выражения:	$\frac{1}{2}\log_3\frac{4}{81}-\frac{1}{3}\log_3\frac{8}{27}+\frac{2}{3}\log_{\frac{1}{2}}\log_3 9+\lg\frac{100\cdot\sqrt[3]{0,001}}{\sqrt{10}}$
3. Решите уравнение:	$\log_3(2x+1)=2$
4. Решите уравнение:	$\lg(x-1)+\lg(x+1)=\lg 8$
5. Решите уравнение:	$\log_{16}x+\log_4 x-\log_2 x=1,25$
6. Решите уравнение:	$2\log_2{}^2 x-3\log_2 x+1=0$

2 вариант	
1. Найдите значения выражения:	$6^{\frac{2}{7}\log_6(8\sqrt{2})}+3^{2-\log_3 9}-7,2^{\log_{7,2}8}$
2. Найдите значения выражения:	$\frac{1}{3}\log_2\frac{27}{8}-\frac{1}{2}\log_2\frac{9}{4}+2\log_{\frac{1}{3}}\log_5 125-\lg\frac{10\cdot\sqrt[4]{0,0001}}{\sqrt{10}}$
3. Решите уравнение:	$\log_{0,2}(x-1)=4$
4. Решите уравнение:	$\log_5(x-1)+\log_5(x-2)=\log_5(x+2)$

5. Решите уравнение:	$\log_3 x + 2\log_x 3 = 3$
6. Решите уравнение:	$\log^2{}_{0,2} x + \log_{0,2} x - 6 = 0$

3 вариант	
1. Найдите значения выражения:	$5^{0,4\log_5(49\sqrt{7})} + 9^{2-\log_9 4} - 1{,}1^{\log_{1,1} 5}$
2. Найдите значения выражения:	$\frac{1}{2}\log_5 \frac{625}{9} - \frac{1}{3}\log_5 \frac{125}{27} + 3\log_{\frac{1}{4}} \log_2 16 - \lg \frac{100 \cdot \sqrt[3]{0,001}}{\sqrt{10}}$
3. Решите уравнение:	$\log_{\frac{1}{2}}(2x+3) = 0$
4. Решите уравнение:	$\log_3(x+2) + \log_3(x+1) = \log_3(x+5)$
5. Решите уравнение:	$\log_2 x + \log_x 2 = 2,5$
6. Решите уравнение:	$\log_{\frac{1}{2}}^2(x-3) + \log_{\frac{1}{2}}(x-3) = 2$

4 вариант	
1. Найдите значения выражения:	$3^{\frac{4}{5}\log_9(25\sqrt{5})} + 7^{2-\log_7 2} - 1{,}8^{\log_{1,8} 3}$
2. Найдите значения выражения:	$\frac{1}{3}\log_4 \frac{64}{125} - \frac{1}{2}\log_4 \frac{4}{25} + 5\log_4 \log_3 81 - \lg \frac{10 \cdot \sqrt[3]{0,001}}{\sqrt{10}}$
3. Решите уравнение:	$\log_3(x+5) = -1$
4. Решите уравнение:	$\lg 5x + \lg(x-1) = 1$
5. Решите уравнение:	$\log_4 x + \log_8 x = 5$
6. Решите уравнение:	$\log^2{}_2(1-x) - 2\log_2(1-x) - 3 = 0$

5 вариант	
1. Найдите значения выражения:	$3^{0,4\log_3(4\sqrt{2})}+4^{3-\log_4 64}-5,1^{\log_{5,1}9}$
2. Найдите значения выражения:	$\frac{1}{3}\log_2\frac{27}{8}-\frac{1}{2}\log_2\frac{9}{4}+2\log_{\frac{1}{3}}\log_5 125-\lg\frac{10\cdot\sqrt[4]{0,0001}}{\sqrt{10}}$
3. Решите уравнение:	$\lg(2x-1)=-1$
4. Решите уравнение:	$\log_5(x+4)-\log_5(1-2x)=-\log_5(2x+3)$
5. Решите уравнение:	$\log_5 x^4-3\log_{\frac{1}{5}}x=14$
6. Решите уравнение:	$\log_{0,5}^2 x-\log_{0,5}x-2=0$

6 вариант	
1. Найдите значения выражения:	$5^{0,4\log_5(49\sqrt{7})}+9^{2-\log_9 4}-1,1^{\log_{1,1}5}$
2. Найдите значения выражения:	$\frac{1}{2}\log_3\frac{4}{81}-\frac{1}{3}\log_3\frac{8}{27}+\frac{2}{3}\log_{\frac{1}{2}}\log_3 9+\lg\frac{100\cdot\sqrt[3]{0,01}}{\sqrt{10}}$
3. Решите уравнение:	$\log_3(2x-1)=-1$
4. Решите уравнение:	$\lg(2x-1)-\lg 0,3=2$
5. Решите уравнение:	$\log_9 x-\log_{27}x=\frac{2}{3}$
6. Решите уравнение:	$\log_2^2 4x+\log_2\frac{x^2}{8}=8$

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомиться с методическими указаниями;
2. Выбрать свой вариант;
3. Решить задание и ответить на вопросы

Содержание отчета:

Подробное решение заданий в соответствии с номером варианта представить в рабочих тетрадях;

Приложение

1. Краткие сведения из теории

Логарифмом положительного числа a по положительному и не равному единице основанию b называется показатель степени, в который надо возвести число b, чтобы получить a.

$\log_b a = c \ (a > 0;\ b > 0;\ b \neq 1)$ тогда и только тогда, когда $b^c = a$. (1)

Основное логарифмическое тождество: $b^{\log_b a} = a$. (2)

Десятичные логарифмы – это логарифмы по основанию 10:

$$\log_{10} a = \lg a \quad (3)$$

Натуральные логарифмы – это логарифмы по основанию e:

$$\log_e a = \ln a \quad (4)$$

$e = 2,718281828459045...$ - иррациональное число; $e \approx 2,7$

Свойства логарифмов:

$\log_a 1 = 0$ $\qquad \log_a a = 1$ $\qquad \log_a a^m = m$

$\log_a \frac{1}{a} = -1$ $\qquad \log_{a^m} a = \frac{1}{m}$ $\qquad \log_{a^m} a^n = \frac{n}{m}$

Основные соотношения:

логарифм произведения $\quad \log_c(ab) = \log_c a + \log_c b \quad$ сумма логарифмов (5)

логарифм частного $\quad \log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b \quad$ разность логарифмов (6)

логарифм степени $\quad \log_c a^k = k \log_c a$ (7)

переход к новому основанию $\quad \log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ (8)

2. Решение типовых примеров:

1. Найдите значение выражения: $3^{0,4\log_3(4\sqrt{2})} + 4^{3-\log_4 64} - 5,1^{\log_{5,1} 9}$.

В решении данного примера используются основное логарифмическое тождество и свойства степени.

По формуле (**7**) преобразую выражение $3^{0,4\log_3(4\sqrt{2})}$ так, чтобы получить основное логарифмическое тождество $3^{\log_3(4\sqrt{2})^{0,4}}$; используя свойства степени, представлю $4^{3-\log_4 64}$, как $4^3 : 4^{\log_4 64}$.

Затем применяю основное логарифмическое тождество (2):

$$3^{0,4\log_3(4\sqrt{2})} + 4^{3-\log_4 64} - 5,1^{\log_{5,1}9} = 3^{\log_3(4\sqrt{2})^{0,4}} + 4^3 : 4^{\log_4 64} - 5,1^{\log_{5,1}9}.$$

Преобразую получившееся выражение, используя свойства степени с действительным показателем:

$$\left(4\sqrt{2}\right)^{0,4} + 64:64 - 9 = (2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}})^{0,4} + 1 - 9 = (2^{2+\frac{1}{2}})^{0,4} - 8 = (2^{\frac{5}{2}})^{0,4} - 8 = 2 - 8 = -6$$

Ответ: -6

2. Найдите значение выражения $\frac{1}{2}\log_3\frac{4}{81} - \frac{1}{3}\log_3\frac{8}{27} + \frac{2}{3}\log_{\frac{1}{2}}\log_3 9 + \lg\frac{100\cdot\sqrt[3]{0,001}}{\sqrt{10}}$:

В решении данного задания используются определение логарифма, свойства логарифмов, свойства степени с действительным показателем.

Используя формулу (7) преобразую выражение:

$$\frac{1}{2}\log_3\frac{4}{81} - \frac{1}{3}\log_3\frac{8}{27} + \frac{2}{3}\log_{\frac{1}{2}}\log_3 9 + \lg\frac{100\cdot\sqrt[3]{0,001}}{\sqrt{10}} =$$

$$\log_3\left(\frac{4}{81}\right)^{\frac{1}{2}} - \log_3\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}\log_{\frac{1}{2}}\log_3 9 + \lg\frac{100\cdot\sqrt[3]{0,001}}{\sqrt{10}},$$

затем использую свойства степени с действительным показателем и определение логарифма (1):

$$\log_3\frac{2}{9} - \log_3\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\log_{\frac{1}{2}} 2 + \lg\frac{100}{\sqrt[3]{1000}\cdot\sqrt{10}} = \log_3\frac{2}{9} - \log_3\frac{2}{3} + \frac{2}{3}(-1) + \lg\frac{10}{10\cdot\sqrt{10}};$$

применю формулу разности логарифмов (6): $\log_3\frac{2}{9} - \log_3\frac{2}{3} + \frac{2}{3}(-1) + \lg\frac{10}{10\cdot\sqrt{10}} =$

$\log_3\left(\frac{2}{9}:\frac{2}{3}\right) - \frac{2}{3} + \lg\frac{1}{\sqrt{10}} = \log_3\frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \lg 10^{-\frac{1}{2}}$. Используя определение логарифма (1) и зная определение десятичного логарифма (3), найду значение выражения: $\log_3\frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \lg 10^{-\frac{1}{2}} = -1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = -1 - \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = -1 - 1\frac{1}{6} = -2\frac{1}{6}$

Ответ: $-2\frac{1}{6}$

3. Решите уравнение: $\log_3(2x+1)=2$

При решении уравнений необходимо проверить входят ли получившиеся корни в область допустимых значений, если область допустимых значений находится трудоемко, то можно воспользоваться непосредственной подстановкой корня в уравнение и проверкой этого корня.

ОДЗ: $2x+1>0$, $2x>-1$, $x>-\frac{1}{2}$.

Использую определение логарифма (1):

$2x+1=3^2$, затем выражаю x: $2x=3^2-1$, $2x=8$, $x=4$

Полученный корень удовлетворяет ОДЗ, значит, 4 – корень данного уравнения.

Ответ: 4

4. Решите уравнение: $\lg(x-1)+\lg(x+1)=\lg 8$

ОДЗ: $\begin{cases} x-1>0 \\ x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x>-1 \end{cases} \Leftrightarrow x>1$

Используя формулу суммы логарифмов (5): $\lg(x-1)+\lg(x+1)=\lg 8$

$$\lg(x-1)\cdot(x+1)=\lg 8$$

$$(x-1)\cdot(x+1)=8$$

Затем преобразую левую часть по формуле разности квадратов и решаю неполное квадратное уравнение: $x^2-1=8;\ x^2=9$. Отсюда $x_1=-3;\ x_2=3$. Проверка данных корней показывает, что $x_1=-3$ не входит в область допустимых значений, значит, $x_2=3$ - корень данного уравнения.

Ответ: 3

5. $\log_{16}x+\log_4 x-\log_2 x=1,25$

ОДЗ: $x>0$

Использую формулу перехода от одного основания логарифма к другому (8), так как наименьшая степень 2, то удобнее всего привести все логарифмы к основанию 2:

$$\log_{16}x=\frac{\log_2 x}{\log_2 16}=\frac{\log_2 x}{4}$$

$$\log_4 x=\frac{\log_2 x}{\log_2 4}=\frac{\log_2 x}{2}$$

Подставляем полученные логарифмы в данное уравнение:

$\log_{16} x + \log_4 x - \log_2 x = 1,25$

$\dfrac{\log_2 x}{4} + \dfrac{\log_2 x}{2} - \log_2 x = 1,25$

$\log_2 x + 2 \cdot \log_2 x - 4 \cdot \log_2 x = 5$

$-\log_2 x = 5$

$\log_2 x = -5$

По определению логарифма (1): $x = 2^{-5}$; $x = \dfrac{1}{2^5} = \dfrac{1}{32}$.

Полученный корень удовлетворяет ОДЗ, значит $\dfrac{1}{32}$ - корень уравнения.

Ответ: $\dfrac{1}{32}$

6. Решите уравнение: $2\log_2^2 x - 3\log_2 x + 1 = 0$.

Данное уравнение решается методом приведения к квадратному уравнению:

ОДЗ: $x > 0$

Пусть $\log_2 x = t$, тогда данное уравнение можно записать, как $2t^2 - 3t + 1 = 0$. Затем решаем квадратное уравнение. Сумма коэффициентов квадратного уравнения равна 0, значит, $t_1 = 1$; $t_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{2}$.

Возвращаемся к замене переменной:

$\log_2 x = 1$ или $\log_2 x = \dfrac{1}{2}$, используя определение логарифма (1) получаем,

$x_1 = 2^1$ $\qquad x_2 = 2^{\frac{1}{2}}$

$x_1 = 2$ $\qquad x_2 = \sqrt{2}$

Оба полученных корня удовлетворяют ОДЗ, значит, $x_1 = 2$, $x_2 = \sqrt{2}$ - корни уравнения.

Ответ: $x_1 = 2$; $x_2 = \sqrt{2}$.

Практическое занятие №5

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Цель практического занятия: закрепить теоретический материал и выработать навыки выполнения операций, связанных с преобразованием тригонометрических выражений.

Подготовка к работе:

Изучение теоретического материала лекционных занятий, учебной литературы, Интернет-ресурсов, раздела « Краткие сведения из теории» настоящего описания ПЗ;

Задание:

Выполнение заданий в соответствии с номером варианта

1. *Выполните задания* в соответствии с номером варианта.

1 вариант	
1. Вычислить	$ctg\frac{3\pi}{2}+tg(-\frac{\pi}{4})-\cos(-\frac{\pi}{3})\cdot\sin\frac{\pi}{6}$
2. Найдите значение выражения:	$\sin(-\frac{\pi}{6})\cdot ctg(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})-\cos(-\frac{\pi}{3})\cdot tg(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{4})$
3. Упростите выражение:	$\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$
4. Вычислите:	$\frac{\cos 85^\circ\cos 40^\circ-\sin 85^\circ\sin(-40^\circ)}{\sin 40^\circ\cos 5^\circ+\cos 40^\circ\sin 5^\circ}$
5. Найдите значение выражения:	$\sin(x+\frac{\pi}{3})+\sin(x-\frac{\pi}{3})$, если $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{4}$
6. Докажите тождество:	$\frac{\cos 3\alpha+\cos\alpha}{\sin 3\alpha-\sin\alpha}=ctg\alpha$
7. Докажите тождество:	$\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{tg(90^\circ-\alpha)-\sin\alpha\cos\alpha}=2tg^2\alpha$

2 вариант	
1. Вычислить:	$-\cos(-\frac{\pi}{3})+\sin(-\frac{\pi}{6})-ctg\frac{3\pi}{2}\cdot tg(-\pi)$

2. Найдите значение выражения:	$\cos(-\frac{\pi}{6})\cdot\sin(-\frac{\pi}{3})+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot ctg(\pi+\frac{\pi}{4})\cdot\sin(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{4})$
3. Упростите выражение:	$\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$
4. Вычислите:	$\frac{3\cos196^\circ+12\cos164^\circ}{\cos16^\circ}$
5. Найдите значение выражения:	$\sin(x+\frac{\pi}{4})+\sin(x-\frac{\pi}{4})$, если $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{4}$
6. Упростите выражение:	$\cos^4 2\alpha-\sin^4 2\alpha$
7. Докажите тождество:	$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{tg\alpha+tg\beta}{tg\alpha-tg\beta}$

3 вариант	
1. Вычислить:	$tg(-\pi)+ctg(-\frac{\pi}{4})-\sin(-\frac{\pi}{6})\cdot\cos(-\frac{\pi}{3})$
2. Найдите значение выражения:	$tg(-\frac{\pi}{4})\cdot ctg(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{4})-\cos(2\pi-\frac{\pi}{6})\cdot\sin(-\frac{\pi}{3})$
3. Докажите тождество:	$1-\sin^2\alpha=\frac{1}{1+tg^2\alpha}$
4. Вычислить:	$\frac{\cos75^\circ\cos25^\circ-\sin75^\circ\sin25^\circ}{\sin20^\circ\cos10^\circ-\cos20^\circ\sin10^\circ}$
5. Найдите значение выражения:	$\sin(x+\frac{\pi}{6})+\sin(x-\frac{\pi}{6})$, если $\sin x=\frac{1}{4}$
6. Упростить:	$\frac{1+\sin2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$
7. Докажите тождество:	$\frac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\cos(45^\circ-\alpha)}{2\sin(30^\circ+\alpha)-\sqrt{3}\sin\alpha}=-\sqrt{2}tg\alpha$

4 вариант

1. Вычислить	$-\cos(-\frac{\pi}{3})+\sin(-\frac{\pi}{6})-ctg\frac{3\pi}{2}\cdot tg(-\pi)$
2. Вычислить:	$\sin(\pi+\frac{\pi}{3})\cdot\cos(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{3})-ctg(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})\cdot\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6})$
3. Докажите тождество:	$1-\cos^2\alpha=\frac{1}{1+ctg^2\alpha}$
4. Вычислите:	$\frac{\cos 85^\circ\cos 40^\circ-\sin 85^\circ\sin(-40^\circ)}{\sin 40^\circ\cos 5^\circ+\cos 40^\circ\sin 5^\circ}$
5. Найдите значение выражения:	$\cos(x+\frac{\pi}{6})-\cos(x-\frac{\pi}{6})$, если $\sin x=\frac{1}{4}$
6. Упростите выражение:	$\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}$
7. Докажите тождество:	$\frac{\cos\alpha-2\cos(60^\circ-\alpha)}{2\sin(\alpha-30^\circ)-\sqrt{3}\sin\alpha}=\sqrt{3}tg\alpha$

5 вариант	
1. Вычислить:	$ctg(\frac{3\pi}{2})+tg(-\frac{\pi}{4})-\cos(-\frac{\pi}{3})\cdot\sin\frac{\pi}{6}$
2. Вычислить:	$\cos(-\frac{\pi}{6})\cdot\sin(-\frac{\pi}{3})+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot ctg(\pi+\frac{\pi}{4})\cdot\sin(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{4})$
3. Упростить:	$\frac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$
4. Вычислите:	$\frac{\cos 75^\circ\cos 25^\circ-\sin 75^\circ\sin 25^\circ}{\sin 20^\circ\cos 10^\circ-\cos 20^\circ\sin 10^\circ}$
5. Найдите значение выражения:	$\cos(x+\frac{\pi}{4})-\cos(x-\frac{\pi}{4})$, если $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{4}$
6. Докажите тождество:	$\frac{\cos 3\alpha+\cos\alpha}{\sin 3\alpha-\sin\alpha}=ctg\alpha$
7. Докажите тождество:	$\frac{ctg\alpha-\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=ctg\alpha$

6 вариант	
1. Вычислить:	$-\cos(-\frac{\pi}{3})+\sin(-\frac{\pi}{6})-ctg\frac{3\pi}{2}\cdot tg(-\pi)$
2. Вычислить:	$tg(-\frac{\pi}{4})\cdot ctg(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{4})-\cos(2\pi-\frac{\pi}{6})\cdot\sin(-\frac{\pi}{3})$
3. Докажите тождество:	$1-\cos^2\alpha=\frac{1}{1+ctg^2\alpha}$
4. Найдите значение выражения:	$\frac{\cos 85^\circ\cos 40^\circ-\sin 85^\circ\sin(-40^\circ)}{\sin 40^\circ\cos 5^\circ+\cos 40^\circ\sin 5^\circ}$
5. Найдите значение выражения:	$\cos(x+\frac{\pi}{3})-\cos(x-\frac{\pi}{3})$, если $\sin x=\frac{3}{4}$
6. Упростите выражение:	$\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}$
7. Докажите тождество:	$\frac{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=2\cos\alpha$

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомиться с методическими указаниями;
2. Выбрать свой вариант;
3. Решить задание и ответить на вопросы

Содержание отчета:

Подробное решение заданий в соответствии с номером варианта представить в рабочих тетрадях;

Приложение

1.Краткие сведения из теории

ОПРЕДЕЛЕНИЯ:

Синус угла α (sinα) – ордината точки P_α **,** полученной поворотом точки P(1;0) вокруг начала координат на угол α.

Косинус угла α (cosα) – абсцисса точки P_α **,** полученной поворотом точки P(1;0) вокруг начала координат на угол α.

Тангенс угла α (tgα) – отношение синуса угла α к его косинусу, т.е. $tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$,

Котангенс угла α (ctgα) – отношение косинуса угла к его синусу, т.е. $ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

ЗНАЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫХ УГЛОВ

α, рад.	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$tg\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не опр.	0	не опр.
$ctg\alpha$	не опр.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	не опр.	0

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ ОДНОГО И ТОГО ЖЕ АРГУМЕНТА:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ **1.1**

$tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, где $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$ **1.2**

$ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, где $\alpha \neq \pi n$, $n \in Z$ **1.3**

$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$, где $\alpha \neq \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in Z$ **1.4**

$1 + tg^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, где $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$ **1.5**

$1 + ctg^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$, где $\alpha \neq \pi n$, $n \in Z$ **1.6**

ЗНАКИ СИНУСА, КОСИНУСА, ТАНГЕНСА И КОТАНГЕНСА:

Синус положителен в I и II четвертях, отрицателен – в III и IY четвертях.

Косинус положителен в I и IY четвертях, отрицателен – во II и III четверти.

Тангенс и котангенс в I и III четвертях положительны, во II и IY четвертях отрицательны.

СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС И КОТАНГЕНС УГЛОВ α и $-\alpha$:

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ **2.1**

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ **2.2**

$\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$ **2.3**

$\mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$ **2.4**

ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ:

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ **3.1**

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ **3.2**

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ **3.3**

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ **3.4**

$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta}$, где $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $\beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $\alpha+\beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in Z$ **3.5**

$tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha tg\beta}$, где $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $\beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $\alpha-\beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in Z$ **3.6**

СИНУС, КОСИНУС И ТАНГЕНС ДВОЙНОГО УГЛА:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ **4.1**

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ **4.2**

$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$, где $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$ **4.3**

ФОРМУЛЫ ПОЛОВИННОГО АРГУМЕНТА:

$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$ **5.1**

$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$ **5.2**

$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$, где $\alpha \neq \pi + 2\pi n$, $n \in Z$ **5.3**

ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СУММЫ В ПРОИЗВЕДЕНИЕ:

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ **6.1**

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad \textbf{6.2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \textbf{6.3}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \textbf{6.4}$$

$$tg\alpha + tg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \text{ где } \alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi n,\ \beta \neq \frac{\pi}{2}+\pi n,\ \mathrm{n} \in \mathrm{Z} \qquad \textbf{6.5}$$

$$tg\alpha - tg\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \text{ где } \alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi n,\ \beta \neq \frac{\pi}{2}+\pi n,\ \mathrm{n} \in \mathrm{Z} \qquad \textbf{6.6}$$

ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ В СУММУ:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)) \qquad \textbf{7.1}$$

$$\cos\alpha\ \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)) \qquad \textbf{7.2}$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)) \qquad \textbf{7.3}$$

СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ $\sin\alpha$**,** $\cos\alpha$ **и** $tg\frac{\alpha}{2}$:

$$\sin\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}, \text{ где } \alpha \neq \pi + 2\pi n,\ \mathrm{n} \in \mathrm{Z} \qquad \textbf{8.1}$$

$$\cos\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}, \text{ где } \alpha \neq \pi + 2\pi n,\ \mathrm{n} \in \mathrm{Z} \qquad \textbf{8.2}$$

ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ:

	Название функции не изменяется			Название функции изменяется на сходное			
	$-\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$

tg	$-tg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$
	$\alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in Z$			$\alpha \neq \pi n$, $n \in Z$			
ctg	$-ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$
	$\alpha \neq \pi n$, $n \in Z$			$\alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in Z$			

2. Решение типовых примеров:

Задание №1.

1. Вычислить $ctg\frac{3\pi}{2}+tg(-\frac{\pi}{4})-\cos(-\frac{\pi}{3})\cdot\sin\frac{\pi}{6}$:

В решении данного примера используются известные значения тригонометрических функций и значения тригонометрических функций отрицательных углов.

По формулам **2.3** и **2.2** вычислим значения тангенса и косинуса отрицательных углов через их значение для положительных углов:

$ctg\frac{3\pi}{2}+tg(-\frac{\pi}{4})-\cos(-\frac{\pi}{3})\cdot\sin\frac{\pi}{6} = ctg\frac{3\pi}{2}-tg\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{6}$, а далее по приведенной таблице известных значений котангенса, тангенса, косинуса и синуса подставим эти значения. Так как $ctg\frac{3\pi}{2}=0, tg\frac{\pi}{4}=1, \cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}, \sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, то

$ctg\frac{3\pi}{2}-tg\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{6}$ = 0-1-$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$ = -1-$\frac{1}{4}$ $=-1\frac{1}{4}$

Ответ: $-1\frac{1}{4}$

2. Найдите значение выражения: $\sin(-\frac{\pi}{6})\cdot ctg(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})-\cos(-\frac{\pi}{3})\cdot tg(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{4})$

В решении данного задания используются знания известных значений тригонометрических функций, значения тригонометрических функций отрицательных углов и формулы приведения.

Применяя формулы приведения, получаем: $\sin(-\frac{\pi}{6})\cdot ctg(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})-\cos(-\frac{\pi}{3})\cdot tg(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{4})$

$= \sin(-\frac{\pi}{6})\cdot(-tg\frac{\pi}{4})-\cos(-\frac{\pi}{3})\cdot ctg\frac{\pi}{4}$, используя формулы **2.1, 2.3, 2.2** приходим

$\sin(-\frac{\pi}{6})\cdot(-tg\frac{\pi}{4})-\cos(-\frac{\pi}{3})\cdot ctg\frac{\pi}{4}$ $= -\sin\frac{\pi}{6}\cdot(-tg\frac{\pi}{4})-\cos\frac{\pi}{3}\cdot ctg\frac{\pi}{4}$ $= =$

$\sin\frac{\pi}{6}\cdot tg\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\cdot ctg\frac{\pi}{4}$, и наконец, подставив значения известных значений синуса, тангенса, косинуса и котангенса ($\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, $tg\frac{\pi}{4}=1$, $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, $ctg\frac{\pi}{4}=1$), получаем:

$\sin\frac{\pi}{6}\cdot tg\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\cdot ctg\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot 1$ $= 0$

Ответ: 0

3. Упростите выражение: $\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$

В решении данного примера используются знания синуса двойного угла, косинуса двойного угла и определение котангенса.

Применим формулу **4.2**: $\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$ $=$ $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$, далее преобразуем знаменатель поучившегося выражения для получения формулы синуса двойного угла: $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$ $=$

$=$ $\frac{\cos 2\alpha}{\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2}}$ $=$ $2\frac{\cos 2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}$, применим формулу **4.1:** $2\frac{\cos 2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}$ $=$ $2\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$, а

далее по определению котангенса получаем, что $2\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$ $=$ $2ctg 2\alpha$

Ответ: $2ctg 2\alpha$

4. Вычислите: $\frac{\cos 85^\circ\cos 40^\circ-\sin 85^\circ\sin(-40^\circ)}{\sin 40^\circ\cos 5^\circ+\cos 40^\circ\sin 5^\circ}$

В решении данного примера используются значения тригонометрических функций отрицательных углов, формулы косинуса разности, синуса суммы, определение котангенса.

Применим формулу **2.1,** получаем: $\frac{\cos 85^\circ\cos 40^\circ-\sin 85^\circ\sin(-40^\circ)}{\sin 40^\circ\cos 5^\circ+\cos 40^\circ\sin 5^\circ}$ $= =$

$\frac{\cos 85^\circ\cos 40^\circ+\sin 85^\circ\sin 40^\circ}{\sin 40^\circ\cos 5^\circ+\cos 40^\circ\sin 5^\circ}$, по формуле **3.4,** $\frac{\cos 85^\circ\cos 40^\circ+\sin 85^\circ\sin 40^\circ}{\sin 40^\circ\cos 5^\circ+\cos 40^\circ\sin 5^\circ}$ $=$

$\frac{\cos(85^\circ-40^\circ)}{\sin 40^\circ\cos 5^\circ+\cos 40^\circ\sin 5^\circ}$, а по формуле **3.1,** $\frac{\cos(85^\circ-40^\circ)}{\sin 40^\circ\cos 5^\circ+\cos 40^\circ\sin 5^\circ}=\frac{\cos 45^\circ}{\sin(40^\circ+5^\circ)}$

$=$ $\frac{\cos 45^\circ}{\sin 45^\circ}$. А теперь вспомним определение котангенса и его значение при 45°, в итоге получаем: $\frac{\cos 45^\circ}{\sin 45^\circ}=ctg 45^\circ=1$

Ответ: 1

5. Найдите значение выражения: $\sin(x+\frac{\pi}{3})+\sin(x-\frac{\pi}{3})$, если $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{4}$

В решении данного примера используется формула суммы синусов **6.1.**

$$\sin(x+\frac{\pi}{3})+\sin(x-\frac{\pi}{3})=2\sin\frac{x+\frac{\pi}{3}+x-\frac{\pi}{3}}{2}\cdot\cos\frac{x+\frac{\pi}{3}-x+\frac{\pi}{3}}{2}==2\sin\frac{2x}{2}\cdot\cos\frac{\frac{2\pi}{3}}{2}==$$

$2\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{3}$, зная, что $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, получаем: $2\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{3}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin x=\sin x$. В условии задачи сказано, что $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Поэтому $\sin(x+\frac{\pi}{3})+\sin(x-\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{4}$, если $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{4}$

6. Докажите тождество: $\frac{\cos 3\alpha+\cos\alpha}{\sin 3\alpha-\sin\alpha}=ctg\alpha$

В решении данной задачи используются формулы суммы косинусов, разности синусов и определение котангенса.

Рассмотрим левую часть выражения $\frac{\cos 3\alpha+\cos\alpha}{\sin 3\alpha-\sin\alpha}$, по формуле **6.3,** получаем:

$\frac{\cos 3\alpha+\cos\alpha}{\sin 3\alpha-\sin\alpha}=\frac{2\cos 2\alpha\cos\alpha}{\sin 3\alpha-\sin\alpha}$, применив формулу **6.2**, получим $\frac{2\cos 2\alpha\cos\alpha}{\sin 3\alpha-\sin\alpha}=\frac{2\cos 2\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha\cos 2\alpha}$. Сократив числитель и знаменатель на $2\cos 2\alpha$, придем к выражению: $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, а это не что иное, как $ctg\alpha$.

Следовательно, левая часть равна правой части, значит, данное равенство тождество.

7. Докажите тождество: $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{tg(90^\circ-\alpha)-\sin\alpha\cos\alpha}=2tg^2\alpha$

В решении задачи используются основное тригонометрическое тождество, формула приведения, определение котангенса и тангенса.

По формуле приведения знаем, что $tg(90^\circ-\alpha)=ctg\alpha$, поэтому рассмотрим левую часть равенства: $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{tg(90^\circ-\alpha)-\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{ctg\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}$, в числителе раскроем квадрат суммы: $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{ctg\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha-1}{ctg\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}$, по формуле **1.1,** имеем: $\frac{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha-1}{ctg\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{ctg\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}$, применим формулу **1.3,**

$$\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{ctg\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\frac{\cos\alpha-\sin^2\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{2\sin^2\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha(1-\sin^2\alpha)}$$, сократим числитель и знаменатель на $\cos\alpha$, получим $\frac{2\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$, используя формулу **1.1,** получим: $\frac{2\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\frac{2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$. А по определению тангенса, $\frac{2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=2tg^2\alpha$.

Значит, левая часть равна правой части, а значит, данное равенство тождество.

Практическое занятие №6

НАХОЖДЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИЙ

Цель практического занятия: научиться применять правила дифференцирования, приобрести навыки и умения дифференцирования функций.

Подготовка к работе:

Изучение теоретического материала лекционных занятий, учебной литературы, Интернет-ресурсов, раздела « Краткие сведения из теории» настоящего описания ПЗ;

Задание:

Выполнение заданий в соответствии с номером варианта

Найти производные функций, используя таблицу производных элементарных функций и правила дифференцирования, в соответствии с номером варианта.

Вариант 1	**Вариант 2**
Найдите производные функций:	Найдите производные функций:
7. $y = 6\sqrt{x} - \frac{1}{x^2} + 5$	1. $y = 8 + 3x\sqrt[3]{x^2} - e^x$
8. $y = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x}$	2. $y = \left(x^2 - x\right)\left(x^3 + x\right)$
9. $y = \frac{x\sqrt{x}}{3\sqrt[4]{x^3}}$	3. $y = \frac{5x\sqrt[5]{x^2}}{8\sqrt{x}}$
10. $y = \frac{4^x - 1}{tgx}$	4. $y = \frac{e^x}{\sqrt{x}}$
11. $y = 3\sin x \cdot \cos x$	5. $y = \sqrt{x} \cdot tgx$

Вариант 3	**Вариант 4**
Найдите производные функций:	Найдите производные функций:
1. $y = \frac{2}{x} - \frac{4x^2}{3} + \frac{5}{x^3}$	1. $y = 5x^2 + 3\ln x - \sqrt[4]{x}$
2. $y = \left(\frac{2}{x} + 3x\right)\left(\sqrt{x} - 1\right)$	2. $y = \frac{3x^2 - 6x + 7}{4x}$
3. $y = \frac{4\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}$	3. $y = \frac{x\sqrt{x}}{2\sqrt[3]{x}}$

4. $y=\dfrac{\log_2 x+1}{\sqrt[3]{x}}$	4. $y=\dfrac{x^2}{1-4x}$
5. $y=x^2\cdot tgx$	5. $y=\sin x\cdot\arccos x$

Вариант 5	**Вариант 6**
Найдите производные функций:	Найдите производные функций:
1. $y=4+5^x-\dfrac{6}{7x^4}$	1. $y=7x^6-2\sin x+\dfrac{3}{\tilde{o}}$
2. $y=\left(4x^2+3\right)\left(2-3x\right)$	2. $y=\left(4+x\right)\left(1+\sqrt{x}\right)$
3. $y=\dfrac{2\sqrt{x}}{5x^2\cdot\sqrt[3]{x}}$	3. $y=\dfrac{5\sqrt[4]{x^3}}{x\sqrt{x}}$
4. $y=\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$	4. $y=\dfrac{5x^2}{x-3}$
5. $y=x\cdot\log_2 x$	5. $y=4^x\cdot arctgx$

Вариант 7	**Вариант 8**
Найдите производные функций:	Найдите производные функций:
1. $y=4e^x-tgx+10$	1. $y=2\cos x+5x^3-\dfrac{9}{x}$
2. $y=\dfrac{7x^2+2x-1}{2x}$	2. $y=\left(3x^2-1\right)\left(1-2x\right)$
3. $y=\dfrac{x^4\cdot\sqrt{x}}{x^{-2}}$	3. $y=\dfrac{7x^2\cdot\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}}$
4. $y=\dfrac{\cos x}{e^x}$	4. $y=\dfrac{\sin x+1}{\lg x}$
5. $y=\sin x\cdot\arccos x$	5. $y=5^x(x^5-10x)$

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомиться с методическими указаниями;
2. Выбрать свой вариант;
3. Решить задание и ответить на вопросы

Содержание отчета:

Подробное решение заданий в соответствии с номером варианта представить в рабочих тетрадях;

Приложение

8. Краткие сведения из теории

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения Δf функции в этой точке к приращению Δx аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Функция $y = f(x)$, имеющая производную в каждой точке некоторого промежутка, называется **дифференцируемой** в этом промежутке.

Производная функции $y = f(x)$ обозначается y', y'_x, $\frac{dy}{dx}$ или f', $f'(x)$, $\frac{df(x)}{dx}$.

Нахождение производной называется **дифференцированием.**

Правила дифференцирования

1. $(cu)' = c \cdot (u)'$, c – const,
2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
3. $(uv)' = u'v + uv'$, где $u, v - \textit{функции от } x$
4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Таблица производных элементарных функций

$(c)' = 0$, c - $const$	$(a^x)' = a^x \ln a$
$(cx)' = c$	$(e^x)' = e^x$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

9. Решение типовых примеров:

Вариант 0
Найдите производные функций:
1. $y = 4x^3 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{6}{\sqrt[3]{x^2}}$
2. $y = 5^x + 2\ln x - 3x$
3. $y = (x^3 + 1)\cos x$
4. $y = \frac{x^3}{2x-1}$
5. $y = \frac{x-1}{2\arccos x}$

Решение:

1) Запишем данную функцию $y = 4x^3 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{6}{\sqrt[3]{x^2}}$ следующим образом:

$$y = 4x^3 - x^{-1/2} + 6x^{-2/3}.$$

Тогда $y' = (4x^3 - x^{-1/2} + 6x^{-2/3})' = (4x^3)' - (x^{-1/2})' + (6x^{-2/3})' = 4(x^3)' - (x^{-1/2})' + 6(x^{-2/3})' =$

$$= 4\cdot 3x^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)x^{-3/2} + 6\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-5/3} = 12x^2 + \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{4}{x\sqrt[3]{x^2}}.$$

2) $y' = \left(5^x + 2\ln x - 3x\right)' = \left(5^x\right)' + 2(\ln x)' - 3x' = 5^x \ln 5 + \frac{2}{x} - 3$ (применили правила дифференцирования 2 и 1).

3) $y' = (x^3+1)'\cos x + (x^3+1)(\cos x)' = 3x^2\cos x - (x^3+1)\sin x$ (применили правило дифференцирования 3).

.4) $y' = \frac{(x^3)'(2x-1) - x^3(2x-1)'}{(2x-1)^2} = \frac{3x^2(2x-1) - x^3\cdot 2}{(2x-1)^2} = \frac{6x^3 - 3x^2 - 2x^3}{(2x-1)^2} = \frac{4x^3 - 3x^2}{(2x-1)^2}$

(применили правила дифференцирования 4 и 1).

5) $y' = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-1}{\arccos x}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{(x-1)'\arccos x - (x-1)(\arccos x)'}{\arccos^2 x} =$

$$=\frac{1\cdot\arccos x-\left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)(x-1)}{2\arccos^2 x}=\frac{\sqrt{1-x^2}\arccos x+x-1}{2\sqrt{1-x^2}\arccos^2 x}$$ (применили правила дифференцирования 4 и 1).

Практическое занятие №7

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ

ПРОИЗВОДНОЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Цель практического занятия: закрепить теоретический материал и выработать навыки и умения выполнения операций исследования функций с помощью первой и второй производной и построение их графиков.

Подготовка к работе:

Изучение теоретического материала лекционных занятий, учебной литературы, Интернет-ресурсов, раздела « Краткие сведения из теории» настоящего описания ПЗ;

Задание:

Выполнение заданий в соответствии с номером варианта

Исследовать функцию и построить ее график в соответствии с номером варианта

Номер варианта	Функция	Номер варианта	Функция	Номер варианта	Функция
1	$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2$	6	$f(x)=x^3-\frac{1}{3}x$	11	$f(x)=x^2-\frac{1}{3}x^3$
2	$f(x)=\frac{1}{3}x-x^3$	7	$f(x)=3x^2-x^3$	12	$f(x)=x^4-10x^2+9$
3	$f(x)=\frac{2}{3}x^3-2x^2$	8	$f(x)=x^4-6x^2+5$	13	$f(x)=5x^2-\frac{5}{3}x^3$
4	$f(x)=x^4-4x^2+3$	9	$f(x)=2x^2-\frac{2}{3}x^3$	14	$f(x)=6x^2-9x-x^3$
5	$f(x)=\frac{5}{3}x^3-5x^2$	10	$f(x)=-x^3+x$	15	$f(x)=3x^3-x+2$

Порядок выполнения работы:

4. Ознакомиться с методическими указаниями;
5. Выбрать свой вариант;
6. Решить задание и ответить на вопросы

Содержание отчета:

Подробное решение заданий в соответствии с номером варианта представить в рабочих тетрадях;

Приложение

Краткие сведения из теории

1. *Краткие сведения из теории.*

Функция называется **возрастающей** в некотором промежутке, если в этом промежутке каждому большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Функция называется **убывающей** в некотором промежутке, если в этом промежутке каждому большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Как возрастающие, так и убывающие функции называются **монотонными**. Если функция не является монотонной, то область ее определения можно разбить на конечное число промежутков монотонности (которые иногда чередуются с промежутками постоянства функции).

Монотонность функции $y = f(x)$ характеризуется знаком ее первой производной $f'(x)$, а именно:

- если в некотором промежутке $f'(x) > 0$, то функция **возрастает** на этом промежутке.

- если в некотором промежутке $f'(x) < 0$, то функция **убывает** на этом промежутке.

- если в некотором промежутке $f'(x) = 0$, то функция **постоянна** на этом промежутке.

Точка $x = x_0$ называется **точкой максимума** функции $y = f(x)$, если существует

такая окрестность точки x_0, что для всех x $(x \neq x_0)$ этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Точка $x = x_0$ называется **точкой минимума** функции $y = f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех x $(x \neq x_0)$ этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Точки максимума и минимума функции называются **точками** ее **экстремума**, а значение функции в точке максимума (минимума) – **максимумом** (**минимумом**) или **экстремумом** функции.

Необходимое условие экстремума. Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум при

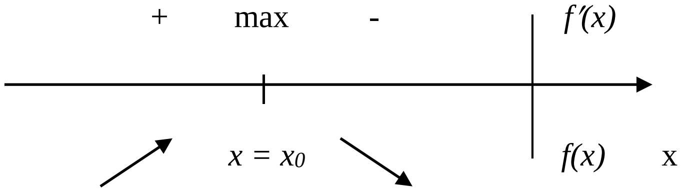
$x = x_0$, то ее производная в этой точке равна нулю или бесконечности либо вовсе не существует, при этом сама функция в точке x_0 определена.

Точками экстремума могут служить только критические точки I рода, т.е. точки, принадлежащие области определения функции, в которых первая производная $f'(x)$

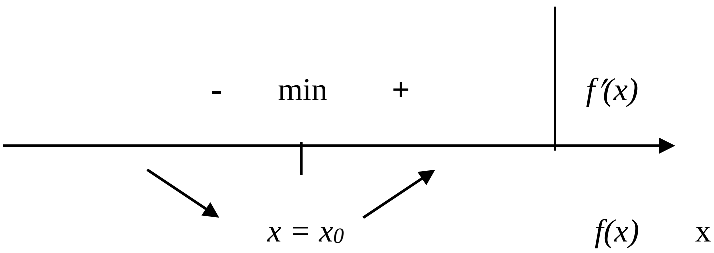
обращается в ноль или терпит разрыв.

Первое достаточное условие существования экстремума функции. Пусть точка $x=x_0$ является критической точкой I рода функции $y = f(x)$, а сама функция дифференцируема во всех точках некоторого промежутка, содержащего эту точку (за исключением, возможно, самой этой точки). Тогда:

1) если при переходе слева направо через критическую точку I рода $x = x_0$ первая производная меняет знак с плюса на минус, то в этой точке функция достигает максимума, т.е. $x = x_0$ – точка максимума, $y_{max} = f(x_0)$;



2) если при переходе слева направо через критическую точку I рода $x = x_0$ первая производная меняет знак с минуса на плюс, то в этой точке функция достигает минимума, т.е. $x = x_0$ – точка минимума, $y_{min} = f(x_0)$;



3) если при переходе через критическую точку I рода первая производная не меняет знака, то в этой точке экстремума нет.

Пример. Найти экстремумы функции $y = (1 - x^2)^3$.

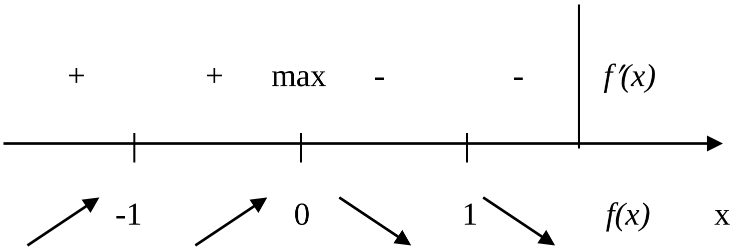
1) Областью определения функции служит множество всех действительных чисел, т.е. $D(f) = (-\infty;+\infty)$.

2) Критические точки определяем из условия $f'(x) = 0$. Находим производную:

$y' = 3(1 - x^2)^2 \cdot (1 - x^2)' = 3(1 - x^2)^2 \cdot (-2x) = -6x(1 - x^2)^2$;

$y' = 0$; $-6x(1 - x^2)^2 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

3) Отметим эти критические точки на числовой прямой.



4) Исследуем знак производной $y' = -6\underline{x}(2 - x^2)^2$ в каждом из полученных интервалов:

$y'(-2) > 0$, $y'(-0{,}5) > 0$, $y'(0{,}5) < 0$, $y'(2) < 0$.

5)   Точка $x = 0$ – точка максимума, так как при переходе через нее слева направо производная меняет знак с плюса на минус: $y_{max} = y(0) = 1$.

Точки $x = -1$ и $x = 1$ не являются точками экстремума, так как при переходе через них первая производная не поменяла знак.

Второе достаточное условие существования экстремума функции. Если в точке $x = x_0$ первая производная функции равна нулю ($f'(x_0) = 0$), а вторая производная отлична от нуля, то $x = x_0$ – точка экстремума.

При этом, если вторая производная в этой точке положительна ($f''(x_0) > 0$), то $x = x_0$ – точка минимума; если вторая производная в этой точке отрицательна ($f''(x_0) < 0$), то $x = x_0$ – точка максимума.

Пример. Найти экстремумы функции $f(x) = x^3 – 3x^2 + 1$.

Решение.

1) Областью определения функции служит множество всех действительных чисел, т.е. $D(f) = (-\infty;+\infty)$.

2) Критические точки определяем из условия $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x ,$$

$$f'(x) = 0 , \; 3x^2 - 6x = 0 ,$$

$$3x(x - 2) = 0,$$

$$x_1 = 0 , \; x_2 = 2.$$

3) Находим вторую производную функции $f''(x) = 6x - 6$.

Исследуем знак второй производной в каждой критической точке:

$f''(0) = -6 < 0$; значит, $x = 0$ – точка максимума , $y_{max} = y(0) = 1$.

$f''(2) = 6 > 0$; значит, $x = 2$ – точка минимума , $y_{min} = y(2) = 2^3 - 3\cdot 2^2 + 1 = 8 - 12 + 1 = -3$.

Кривая обращена **выпуклостью вверх** или **выпукла** ($\cap$) на некотором промежутке, если она расположена ниже касательной, проведенной к кривой в любой точке этого промежутка.

Кривая обращена **выпуклостью вниз** или **вогнута** ($\cup$) на некотором промежутке, если она расположена выше касательной, проведенной к кривой в любой точке этого промежутка.

Точкой перегиба кривой называется такая ее точка, которая отделяет участок выпуклости от участка вогнутости.

Достаточное условие выпуклости (вогнутости) кривой.

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ является выпуклым на некотором промежутке, если вторая производная функции отрицательна в каждой точке этого промежутка: $f''(x) < 0$.

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ является вогнутым на некотором промежутке, если вторая производная функции положительна в каждой точке этого промежутка: $f''(x) > 0$.

Точками перегиба графика функции $y = f(x)$ могут служить только точки, абсциссы которых являются критическими точками II рода, т.е. точки, находящиеся внутри области определения функции $y = f(x)$, в которых вторая производная $f''(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.

Точками перегиба графика функции $y = f(x)$ являются лишь те из указанных точек, при переходе через которые вторая производная $f''(x)$ меняет знак.

Пример. Определить направление вогнутости и точки перегиба кривой

$f(x) = x^4 + 2x^3 – 12x^2 – 5x +2$.

Решение:

1) Областью определения функции служит множество всех действительных чисел, т.е. $D(f) = (-\infty;+\infty)$.

2) Найдем вторую производную функции и критические точки II рода из условия

$f''(x) = 0$:

$f'(x) = 4x^3 + 2\cdot 3x^2 - 12\cdot 2x – 5 = 4x^3 + 6x^2 – 24x – 5$;

$f''(x) = 4\cdot 3x^2 + 6\cdot 2x – 24 = 12x^2 + 12x –24$;

$f''(x) = 12(x^2 + x – 2)$;

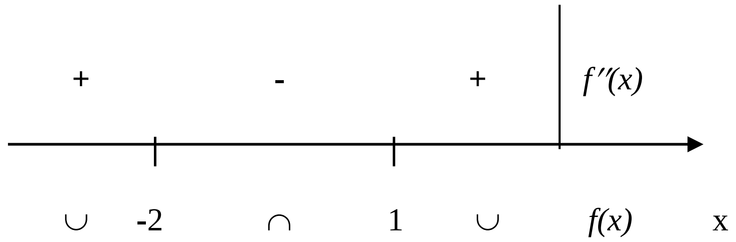
$f''(x) = 0$ при $x^2 + x – 2 = 0$,

Найдем корни квадратного уравнения:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \ ,$$

$x_1 = -2$, $x_2 = 1$.

3) Отметим критические точки II рода $x_1 = -2$, $x_2 = 1$ на числовой прямой.



4) Исследуем знак второй производной в каждом из полученных интервалов:

$f''(-3) > 0$, $f''(0) < 0$, $f''(2) > 0$.

5) Кривая вогнута при $x < -2$ и $x > 1$; кривая выпукла при $-2 < x < 1$.

Так как при переходе через критические точки II рода $x_1 = -2$, $x_2 = 1$ вторая производная поменяла знак, следовательно обе точки являются точками перегиба.

Найдем их вторые координаты:

$f(-2) = (-2)^4 + 2\cdot(-2)^3 - 12\cdot(-2)^2 - 5\cdot(-2) + 2 = 16 - 16 - 48 + 10 + 2 = -36$

$f(1) = 1^4 + 2\cdot1^3 - 12\cdot1^2 - 5\cdot1 + 2 = 1 + 2 - 12 - 5 + 2 = -12$.

Т.о. точки перегиба (-2; -36), (1; -12) .

Для исследования функций и построения графиков функций можно использовать следующую схему:

1. Найти область определения функции, если она не указана заранее.
2. Проверить функцию на четность и нечетность .
3. Исследовать функцию на периодичность.
4. Найти точки пересечения графика функции с осями координат ($f(x) = 0$; $y = f(0)$).
5. Найти интервалы знакопостоянства функции.
6. Найти критические точки первого рода, для этого нужно найти первую производную функции и приравнять ее нулю ($f'(x) = 0$); определить, в каких точках она не существует.
7. Проверить критические точки на экстремум, для этого найти вторую производную и определить ее знак ($f''(x_i) = 0$ - критическая точка – не экстремум, $f''(x_i) > 0$ - критическая точка – точка минимума функции, $f''(x_i) < 0$ - критическая точка - точка максимума).
8. Исследовать функцию на монотонность ($f'(x) > 0$ - функция возрастает, $f'(x) < 0$ - функция убывает).
9. Найти критические точки второго рода, для этого приравнять нулю вторую производную ($f''(x) = 0$).
10. Найти интервалы выпуклости графика функции ($f''(x) < 0$ - функция выпуклая, $f''(x) > 0$ - функция вогнутая).
11. Исследовать критические точки второго рода на точки перегиба (если вторая производная при переходе через критическую точку второго рода меняет знак – критическая точка является точкой перегиба, то есть отделяет выпуклую часть кривой от вогнутой).

Для исследования функции следует воспользоваться схемой, составить необходимые таблицы, затем по полученным данным построить график функции.

2. Решение типовых примеров:

Исследуйте функцию $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ и постройте ее график.

1. Областью определения данной функции является все множество действительных чисел: D(*f*) = (–∞; +∞) .
2. $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 + 1 = f(x)$, то есть функция четная.
3. Функция непериодическая.
4. Для определения точек пересечения функции с осью x решаем биквадратное

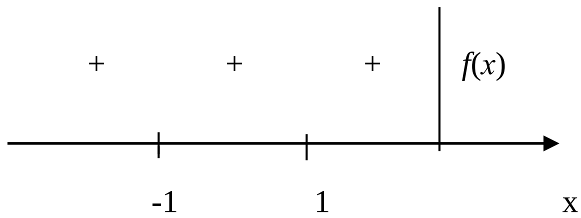
уравнение:

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 0$$
$$(x^2 - 1)^2 = 0$$
$$x^2 - 1 = 0$$
$$x^2 = 1$$
$$x = \pm\sqrt{1}$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 1.$$

Пересечение с осью *y:* *f*(0) = 1.

5. Найдем интервалы знакопостоянства функции: отметим на оси x точки пересечения функции с этой осью и определим знак исследуемой функции на каждом полученном интервале.



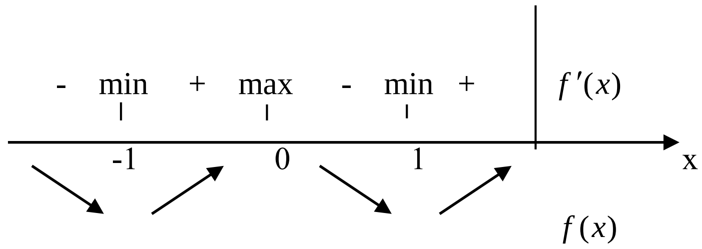
Функция $f(x) > 0$ при всех x кроме x_1 и x_2.

6. $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x+1)(x-1) = 0$; $x_1 = -1$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1$.

7. Вычисляем вторую производную и находим ее значение в критических точках первого рода: $f''(x) = 12x^2 - 4 = 4(3x^2 - 1)$;

$f''(-1) = 8 > 0$; $f''(0) = -4 < 0$; $f''(1) = 8 > 0$, то есть x = -1 – точка минимума функции, x = 0 – точка максимума; x = 1 – точка минимума.

8. Исследуем функцию на монотонность: отметим на оси x критические точки первого рода и определим знак первой производной на каждом полученном интервале.



Первая производная $f'(x) = 4x(x+1)(x-1)$ имеет следующие знаки:

при $x \in (-\infty;-1)$ $f'(x) < 0$ - функция убывает;

при $x \in (-1;0)$ $f'(x) > 0$ - функция возрастает;

при $x \in (0;1)$ $f'(x) < 0$ - функция убывает;

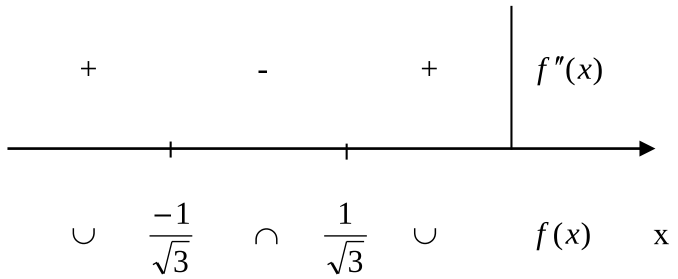
при $x \in (1;+\infty)$ $f'(x) > 0$ - функция возрастает.

Результаты исследования приводятся в таблице:

x	(-∞; -1)	-1	(-1; 0)	0	(0; 1)	1	(1; ∞)
f′(x)	-	0	+	0	-	0	+
f″(x)		8		-4		8	
f(x)	убывает	min 0	возрастает	max 1	убывает	min 0	возрастает

9. Для определения критических точек второго рода приравниваем нулю вторую производную $f''(x) = 12x^2 - 4 = 4(3x^2 - 1) = 0$ и находим: $x_1 = \dfrac{-1}{\sqrt{3}}$ и $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

10. Найдем интервалы выпуклости графика функции: отметим на оси x критические точки второго рода и определим знак второй производной на каждом полученном интервале.



Вторая производная

при $x \in \left(-\infty;\ \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ положительна – функция вогнутая;

при $x \in \left(\frac{-1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ отрицательна – функция выпуклая;

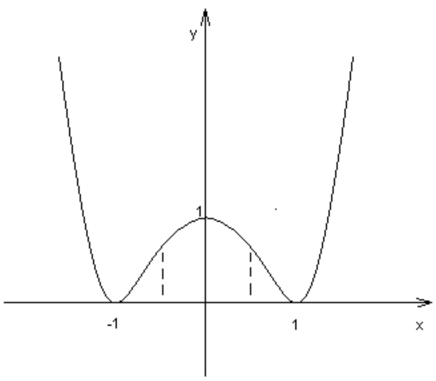
при $x \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}};\ +\infty\right)$ положительна – функция вогнутая.

11. Обе критические точки являются точками перегиба, так как в них происходит изменение знака второй производной.

Результаты исследования приводятся в таблице:

x	(-∞; -1/$\sqrt{3}$)	-1/$\sqrt{3}$	(-1/$\sqrt{3}$;1/$\sqrt{3}$)	1/$\sqrt{3}$	(1/$\sqrt{3}$;∞)
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	вогнутая	перегиб 4/9	выпуклая	перегиб 4/9	вогнутая

Пользуясь четностью функции, построим график для правой полуплоскости, а затем отразим его симметрично относительно оси y. Нанесем на график точки пересечения с осями: (1; 0) и (0; 1). Точка (0; 1) является точкой максимума; точка (1; 0) - точкой минимума. В промежутке между этими точками функция убывает, в точке $x = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.58$ функция меняет свою вогнутость на выпуклость. После $x = 1$ функция возрастает.



Практическое занятие №8

НАХОЖДЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ МЕТОДОМ НЕПОСРЕДСТВЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Цель практического занятия: закрепить теоретический материал и выработать навыки и умения нахождения неопределенных интегралов.

Подготовка к работе:

Изучение теоретического материала лекционных занятий, учебной литературы, Интернет-ресурсов, раздела « Краткие сведения из теории» настоящего описания ПЗ;

Задание:

Выполнение заданий в соответствии с номером варианта

Найти неопределенные интегралы в соответствии с номером варианта.

Вариант 1	**Вариант 2**
Найдите интегралы функций:	Найдите интегралы функций:
12. $\int (8-\frac{1}{2\cos^2 x})dx$	6. $\int (2\cos x+\frac{2}{x})dx$
13. $\int \frac{4+x}{\sqrt{x}}dx$	7. $\int \frac{x^{-\frac{1}{3}}-1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$
14. $\int (x-1)(x+1)dx$	8. $\int (x+1)^2 dx$
15. $\int \frac{\cos 7x+\cos 5x}{\cos 6x}dx$	9. $\int \frac{\sin 5x-\sin 7x}{\cos 6x}dx$
16. $\int \frac{3dx}{x^2+25}$	10. $\int \frac{2dx}{\sqrt{x^2+81}}$

Вариант 3	**Вариант 4**
Найдите интегралы функций:	Найдите интегралы функций:
6. $\int (2-\frac{3}{1+x^2}+e^x)dx$	6. $\int (10x^4-\frac{1}{2\sin^2 x})dx$
7. $\int \frac{x\sqrt{x}-x}{x^2}dx$	7. $\int \frac{x^{\frac{-2}{3}}-1}{\sqrt[3]{x}}dx$
8. $\int x(x+1)^2 dx$	8. $\int 3^x(3^x+4)dx$
9. $\int \frac{5-4\cos^3 x}{\cos^2 x}dx$	9. $\int \frac{\cos 9x+\cos 7x}{\cos 8x}dx$

10. $\int \frac{4dx}{x^2+16}$	10. $\int \frac{3dx}{\sqrt{9-x^2}}$

Вариант 5	**Вариант 6**
Найдите интегралы функций:	Найдите интегралы функций:
6. $\int (3\sin x + 5^x)dx$	6. $\int (\frac{x^3}{2} - 3\cos x)dx$
7. $\int \frac{x^3-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$	7. $\int \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt[3]{x}}dx$
8. $\int x^2(x+1)dx$	8. $\int x^2(5x-3)dx$
9. $\int \frac{32^x-2^x}{4^x}dx$	9. $\int \frac{\sin 3x - \sin 5x}{\cos 4x}dx$
10. $\int \frac{2dx}{\sqrt{x^2+4}}$	10. $\int \frac{4dx}{25-x^2}$

Вариант 7	**Вариант 8**
Найдите интегралы функций:	Найдите интегралы функций:
6. $\int \left(x - \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\right)dx$	6. $\int (3x^2 + \frac{1}{2x} + e^x)dx$
7. $\int \frac{5+\sqrt[4]{x}}{x}dx$	7. $\int \frac{x^{-\frac{1}{3}}-x}{\sqrt[3]{x^2}}dx$
8. $\int (x-1)(x+4)dx$	8. $\int 6^x(6^x+4)dx$
9. $\int \frac{1-\cos 2x}{6\sin x}dx$	9. $\int \frac{7+2x\sin^2 x}{\sin^2 x}dx$
10. $\int \frac{8dx}{16-x^2}$	10. $\int \frac{5dx}{\sqrt{49-x^2}}$

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомиться с методическими указаниями;
2. Выбрать свой вариант;
3. Решить задание и ответить на вопросы

Содержание отчета:

Подробное решение заданий в соответствии с номером варианта представить в рабочих тетрадях;

Приложение

1. Краткие сведения из теории

Функция *F(x)* называется **первообразной** для функции *f(x)*, если *F′(x) = f(x)*

(или *d F(x) = f(x)dx*).

Любая непрерывная функция *f(x)* имеет бесконечное множество первообразных, которые отличаются друг от друга постоянным слагаемым.

Общее выражение *F(x) + C* совокупности всех первообразных для функции *f(x)* называется **неопределенным интегралом** от этой функции:

$\int f(x)dx = F(x) + C$, если $(F(x) + C)' = f(x)$, где

f(x)dx – подынтегральное выражение;

F(x) – подынтегральная функция;

x –переменная интегрирования,

C – произвольная постоянная.

Основные свойства неопределенного интеграла

1) Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$(\int f(x)dx)' = f(x).$$

2) Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная:

$$\int df(x) = f(x) + C.$$

3) Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

4) Неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от слагаемых функций:

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

Таблица простейших интегралов.

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq 1)$.

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tg\ x + C$.

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\ x + C$.

3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.

4. $\int e^x = e^x + C$.

5. $\int \cos x \; dx = \sin \; x + C$.

6. $\int \sin \; x \; dx = -\cos x + C$.

9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$.

10. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C$.

11. $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a} \ln \left| \dfrac{a+x}{a-x} \right| + C$.

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C$.

2. Решение типовых примеров:

Вариант 0	
Найдите интегралы функций:	
1.	$\int (3 - 5\sin \; x)dx$
2.	$\int \dfrac{2x^4 - 5x\sqrt[3]{x} + 7\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} dx$
3.	$\int (1 - 6^x)^2 dx$
4.	$\int \dfrac{\sin \; 7x - \sin \; x}{\cos 4x} dx$
5.	$\int \dfrac{4}{9 - x^2} dx$

Решение:

1) $\int (3 - 5\sin \; x)dx = \int 3dx - 5\int \sin \; xdx = 3x + 5\cos x + C$.

2) $\int \dfrac{2x^4 - 5x\sqrt[3]{x} + 7\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} dx = \int (2x^{\frac{5}{2}} - 5x^{-\frac{1}{6}} + \dfrac{7}{x})dx = \int 2x^{\frac{5}{2}} dx - \int 5x^{-\frac{1}{6}} dx + \int \dfrac{7}{x} dx =$

$= 2 \cdot \dfrac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} - 5 \cdot \dfrac{x^{-\frac{1}{6}+1}}{-\frac{1}{6}+1} + 7\ln|x| + C = \dfrac{4}{7} x^{\frac{7}{2}} - 6x^{\frac{5}{6}} + 7\ln|x| + C$.

3) $\int (1 - 6^x)^2 dx = \int (1 - 2 \cdot 6^x + 36^x)dx = x - \dfrac{2}{\ln 6} \cdot 6^x + \dfrac{36^x}{2\ln 6} + C$.

4) $\int \frac{\sin 7x - \sin x}{\cos 4x} dx = \int \frac{2\sin\left(\frac{7x - x}{2}\right)\cdot \cos\left(\frac{7x + x}{2}\right)}{\cos 4x} dx = 2 \cdot \int \frac{\sin 3x \cdot \cos 4x}{\cos 4x} dx =$

$= 2 \cdot \int \sin 3x dx = -\frac{2}{3} \cdot \cos 3x + C$.

5) $\int \frac{4}{9 - x^2} dx = 4 \cdot \int \frac{1}{9 - x^2} dx = 4 \cdot \int \frac{1}{3^2 - x^2} dx = 4 \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} \ln\left|\frac{3 + x}{3 - x}\right| + C = \frac{2}{3} \ln\left|\frac{3 + x}{3 - x}\right| + C$.

Практическое занятие №9

ПОСТРОЕНИЕ СЕЧЕНИЙ ТЕТРАЭДРА И ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

Цель практического занятия: научиться строить сечения тетраэдра и параллелепипеда.

Подготовка к работе:

Изучение теоретического материала лекционных занятий, учебной литературы, Интернет-ресурсов, раздела « Краткие сведения из теории» настоящего описания ПЗ;

Задание:

Выполнение заданий в соответствии с номером варианта

1 вариант
1. $DABC$ – тетраэдр. Точка К принадлежит высоте пирамиды DN. Постройте сечение тетраэдра, проходящее через точки А, В и К.
2. Изобразите куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и отметьте внутреннюю точку М грани AA_1B_1B. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точку М параллельно плоскости BDD_1.
3. Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки $M \in AA_1$; $N \in AB$; $K \in B_1C_1$.

2 вариант
1. Дан тетраэдр $SABC$. Точка M принадлежит стороне AB, $AM = MB$; точка N принадлежит стороне BC, $CN = NB$. Постройте сечение плоскостью MNE, если $SB \parallel (MNE)$.
2. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершины A_1; D_1 и середину ребра CC_1.
3. Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью MNK, где $M \in CC_1$, $N \in AD$, $K \in BB_1$.

3 вариант
1. Постройте сечение тетраэдра $DABC$ плоскостью, проходящей через точку N – середину CD, M – середину PB и точку К, лежащую в плоскости основания.
2. Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью, проходящей через ребро CC_1 и точку пересечения диагоналей грани AA_1D_1D.
3. Изобразите куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка М – середина Аи В, N – середина AD. Постройте сечение, проходящее через точки М, N и C_1.

4 вариант
1. Изобразите тетраэдр NKLM. Постройте сечение, проходящее через середину ребра LM, параллельно LK и точку O, лежащую на стороне NM.
2. Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью, проходящей через точку пересечения диагоналей грани $ABCD$ параллельно плоскости AB_1C_1.
3. Изобразите прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью MNK, где $M \in BB_1$, $N \in AA_1$, $K \in AD$.

5 вариант
1. Постройте сечение тетраэдра $DABC$ плоскостью, проходящей через точку N – середину CD, M – середину PB и точку K, лежащую в плоскости основания.
2. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершины A , D_1 и середину ребра CC_1.
3. Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью MNK, где $M \in CC_1$, $N \in AD$, $K \in BB_1$.

6 вариант
1. $DABC$ - тетраэдр. Точка K принадлежит высоте пирамиды DN. Построить сечение тетраэдра, проходящее через точки A, B и K.
2. Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью, проходящей через ребро CC_1 и точку пересечения диагоналей грани AA_1D_1D.
3. Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки $M \in AA_1$; $N \in AB$; $K \in B_1C_1$.

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомиться с методическими указаниями;
2. Выбрать свой вариант;
3. Решить задание и ответить на вопросы

Содержание отчета:

Подробное решение заданий в соответствии с номером варианта представить в рабочих тетрадях;

Приложение

1. Краткие сведения из теории

Для решения многих геометрических задач, связанных с тетраэдром и параллелепипедом, полезно уметь строить их сечения различными плоскостями.

Уточним, что понимается под сечением тетраэдра или параллелепипеда.

Секущая плоскость тетраэдра (параллелепипеда) - любая плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данного тетраэдра (параллелепипеда). Секущая плоскость пересекает грани тетраэдра (параллелепипеда) по отрезкам.

Сечением тетраэдра (параллелепипеда) называется многоугольник, сторонами которого являются эти отрезки**.**

Так как тетраэдр имеет четыре грани, то его сечениями могут быть только треугольники (рис.1) и четырехугольники (рис.2).

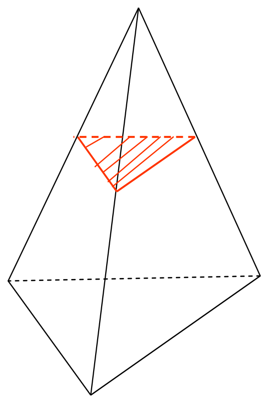


Рис. 1

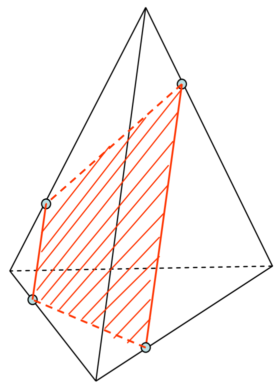


Рис. 2

Параллелепипед имеет шесть граней. Его сечениями могут быть треугольники (рис.3), четырехугольники (рис.3), пятиугольники (рис. 4) и шестиугольники (рис. 5).

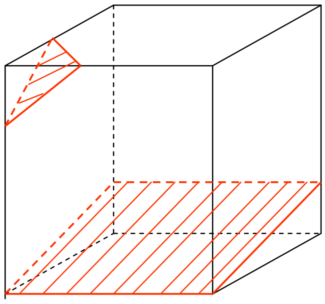


Рис. 3

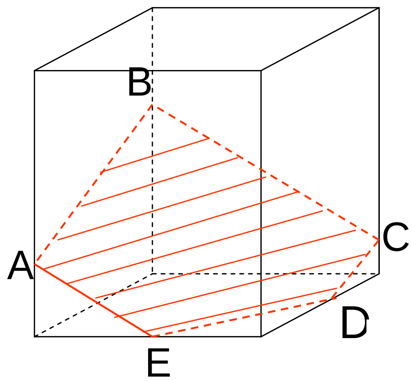


Рис. 4

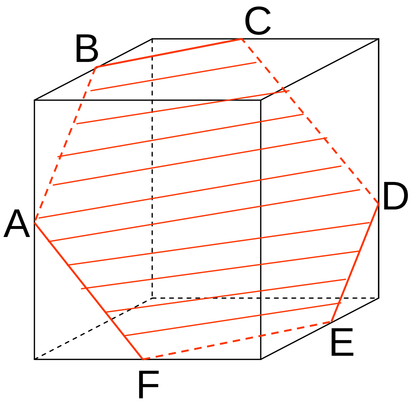


рис. 5

При построении сечений параллелепипеда на рисунке следует учитывать тот факт, что если секущая плоскость пересекает две противоположные грани по каким-то отрезкам, то эти отрезки параллельны. (Это следует из свойства: если две параллельные плоскости пересечены третьей, то их линии пересечения параллельны.) Так, на рисунке

4, секущая плоскость пересекает две противоположные грани (левую и правую) по отрезкам AB и CD, а две другие противоположные грани (переднюю и заднюю) – по отрезкам AE и BC, поэтому $AB \| CD$, $AE \| BC$. По той же причине на рисунке 5 видим, что $AB \| ED$, $AF \| CD$, $BC \| EF$.

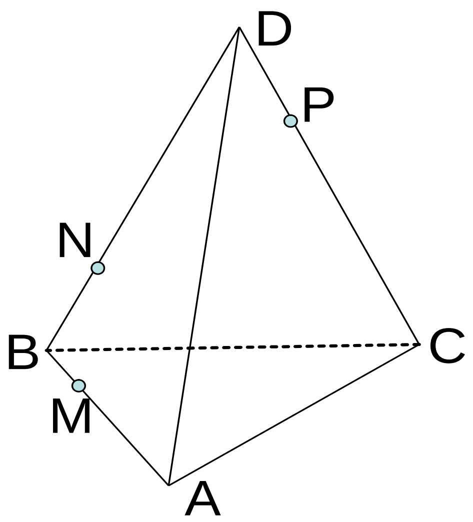
Для построения сечения достаточно построить точки пересечения секущей плоскости с ребрами тетраэдра (параллелепипеда), после чего остается провести отрезки, соединяющие каждые две построенные точки, лежащие в одной и той же грани.

2. Решение типовых примеров:

Задача №1.

На ребрах AB, BD и CD тетраэдра $ABCD$ отмечены точки M, N и P. Построить сечение тетраэдра плоскостью MNP (рис.6).

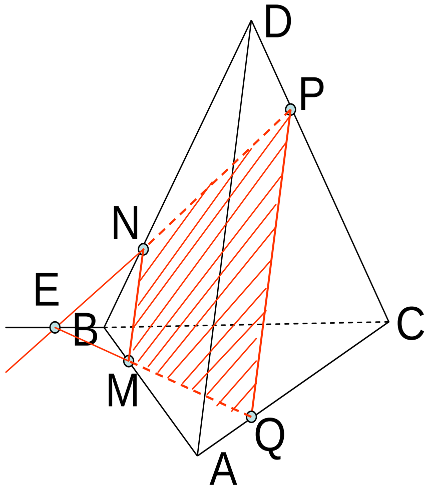
рис. 6



Решение.

1 случай: если прямые NP и BC пересекаются.

Рис. 7	1. Построим сначала прямую, по которой плоскость MNP пересекается с плоскостью грани ABC. Точка M является общей точкой пересечения этих плоскостей. $(MNP)\bigcap(ABC)=M$ 2. Для построения еще одной общей точки продолжим отрезки NP и BC до их пересечения в точке E (рис. 7), которая и будет второй общей точкой плоскостей MNP и ABC. $(NP)\cap(BC)=E$



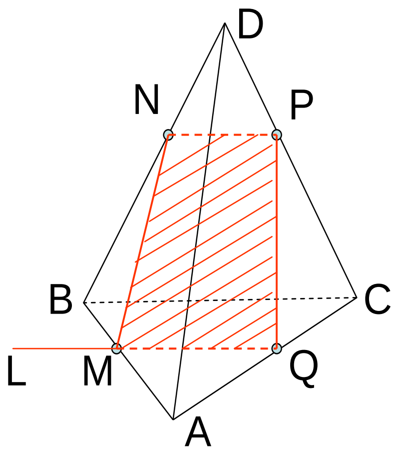
3. Следовательно, эти плоскости пересекаются по прямой ME.
$$(MNP)\bigcap(ABC)=ME$$

4. Прямая ME пересекает ребро AC в некоторой точке Q.
$$(ME)\cap(AC)=Q$$

5. Точки M, N, P, Q лежат в одной плоскости, значит, четырехугольник $MNPQ$ - искомое сечение.

2 случай: если прямые NP и BC параллельны.

Рис. 8



1. Если прямые NP и BC параллельны (рис. 8), то прямая NP параллельна грани ABC, поэтому плоскость MNP пересекает эту грань по прямой ML, параллельной прямой NP.
$$(NP)\|(ABC)$$
$$(MNP)\cap(ABC)=ML,\ (ML)\|(NP)$$

2. Точка Q, как и в первом случае, есть точка пересечения ребра AC с

прямой ML.
$$(AC)\cap(ML)=Q$$

3. Четырехугольник $MNPQ$ - искомое сечение.

Задача №2.

Точка M лежит на боковой грани ADB тетраэдра $DABC$ (рис. 9). Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку M параллельно основанию ABC.

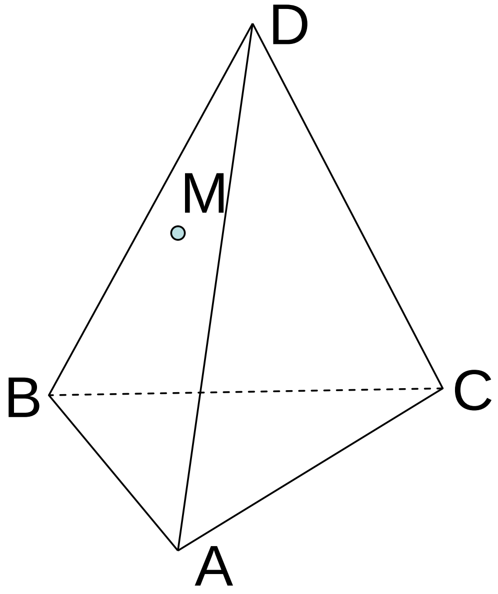
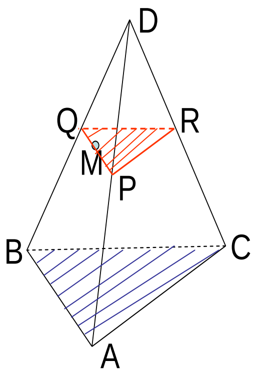


рис. 9

Рис. 10



Так как секущая плоскость параллельна плоскости ABC, то она параллельна прямым AB, BC и CA. Следовательно, секущая плоскость пересекает боковые грани тетраэдра по прямым, параллельным сторонам треугольника ABC. (Следует из утверждения: если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна этой прямой).

Отсюда вытекает следующий способ построения искомого сечения:

1. Проведем через точку М прямую, параллельную отрезку AB, и обозначим буквами P и Q точки пересечения этой прямой с боковыми ребрами DA и DB.
   Провожу (QP), $M \in (QP)$, $(QP) \| (AB)$.

2. Затем через точку P проведем прямую, параллельную отрезку AC, и обозначим буквой R точку пересечения этой прямой с ребром DC.
   Провожу $(PR) \| (AC)$, $(PR) \cap (DC) = R$

3. Треугольник PQR - искомое сечение (рис.10).

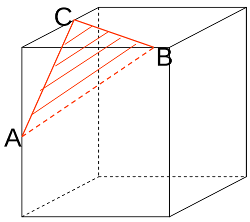
Задача №3.

На ребрах параллелепипеда даны точки А, В и С. Построить сечение параллелепипеда плоскостью ABC.

Решение: Построение искомого сечения зависит от того, на каких ребрах параллелепипеда лежат точки А, В и С.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

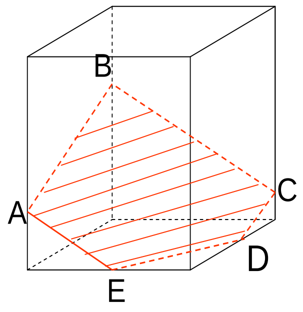
1 случай: Если точки А, В и С лежат на ребрах, выходящих из одной вершины

Рис. 11  	Проводим отрезки AB, BC и CA, и получится искомое сечение – треугольник ABC.

(рис. 11).

2 случай

Рис. 12	1. Если точки А, В и С расположены так, как показано на рисунке 12, то сначала нужно провести отрезки AB, BC. Проводим $[AB]$, $[BC]$. 2. Через точку А провести прямую, параллельную (BC) - прямая AE, а через точку С – прямую, параллельную AB, это прямая (CD).



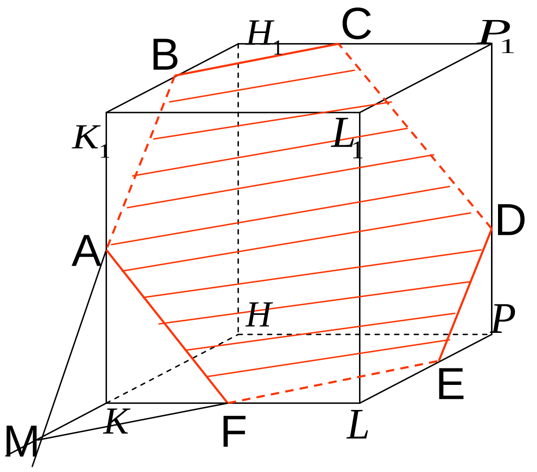
$E \in (AE),\ (AE)\|(BC)$

$D \in (CD),\ (CD)\|(AB)$

3. Проводим отрезок ED.
4. Искомое сечение – пятиугольник $ABCDE$.

3 случай

Рис. 13



Более сложный случай, когда данные точки А, В и С расположены так, как показано на рисунке 13.

1. В этом случае сначала построим прямую, по которой секущая плоскость пересекается с плоскостью нижнего основания. Для этого проведем прямую AB и продолжим нижнее ребро, лежащее в той же грани, что и прямая AB, до пересечения с этой прямой в точке М.

Проводим (AB), продолжим (KH),

$$(KH) \cap (AB) = M$$

2. Далее через точку М проведем прямую, параллельную прямой BC. Это и есть прямая, по которой секущая плоскость пересекается с плоскостью нижнего основания. Эта прямая пересекается с ребрами нижнего основания в точках Е и F.

Проводим $(ME)\|(BC)$, $(ME) \cap (HPLK)$ в точках E и F.

	3. Затем через точку E поведем прямую, параллельную прямой AB, получим точку D. Провожу $(ED)\|(AB)$. 4. Проводим отрезки AF и CD. 5. Искомое сечение - шестиугольник $ABCDEF$.

Практическое занятие №10

ПРИМЕНЕНИЕ ВЕКТОРОВ И КООРДИНАТ К РЕШЕНИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Цель практического занятия: приобрести навыки выполнения действий над векторами и умения применять векторы и метод координат к решению геометрических задач.

Подготовка к работе:

Изучение теоретического материала лекционных занятий, учебной литературы, Интернет-ресурсов, раздела « Краткие сведения из теории» настоящего описания ПЗ;

Задание:

Выполнение заданий в соответствии с номером варианта

Даны координаты вершин треугольника АВС.

1. Вычислите $\angle \tilde{N}$ в ΔABC.
2. Определите вид ΔABC.
3. Найдите координаты вектора $\vec{a} = 2\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{BA}$.

№ варианта	Координаты вершин треугольника АВС
1.	А (4; 6; 3), В (-5; 2; 6), С (4;-4; -3).
2.	А (4; 3; -2), В (-3; -1; 4), С (2; 2; 1).
3.	А (-2; -2; 4), В (1; 3; -2), С (1; 4; 2).
4.	А (2; 4; 3), В (3; 1; -4), С (-1; 2; 2).
5.	А (2; 4; 5), В (1; -2; 3), С (-1; -2; 4).
6.	А (-1; -2; 4), В (-1; 3; 5), С (1; 4; 2).
7.	А (1; 3; 2), В (-2; 4; -1), С (1; 3; -2).
8.	А (2; -4; 3), В (-3; -2; 4), С (0; 0; -2).

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомиться с методическими указаниями;
2. Выбрать свой вариант;
3. Решить задание и ответить на вопросы

Содержание отчета: Подробное решение заданий в соответствии с номером варианта представить в рабочих тетрадях;

Приложение

1. **Краткие сведения из теории**

Понятие вектора. Некоторые физические величины (сила, скорость, ускорение и др.) характеризуются не только числовым значением, но и направлением. Такие величины принято изображать направленными отрезками, которые называются векторами.

Абсолютной величиной (или модулем) вектора называется длина отрезка, изображающего вектор.

В прямоугольной системе координат в пространстве любой вектор $\vec{a}$ можно разложить единственным образом по базисным векторам

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \ ,$$

коэффициенты a_x, a_y и a_z этого разложения называются **координатами** вектора $\vec{a}$ в данной системе координат.

Абсолютная величина вектора $\vec{a}$ равна квадратному корню из суммы квадратов его координат: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Действия над векторами, заданными своими координатами.

1. При сложении двух (или большего числа) векторов их соответственные координаты складываются:
$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z).$$

2. При вычитании векторов их соответственные координаты вычитаются:
$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x; a_y - b_y; a_z - b_z)$$

3. При умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число:
$$k\vec{a} = (ka_x; ka_y; ka_z).$$

4. Скалярным произведением двух ненулевых векторов называют число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:
$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi .$$

Скалярное произведение равно сумме попарных произведений соответствующих координат векторов:

$$\vec{a}\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z .$$

Вычисление угла между векторами. Из определения скалярного произведения векторов можно получить величину угла между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$ или в координатах: $$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} .$$

<u>Пример 1</u>: Даны два вектора $\vec{a}(1;-2)$ и $\vec{b}$ (1;3).

1. Найдите координаты векторов $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ и $\vec{d} = -3\vec{b}$;

Координаты векторов $3\vec{a}$ и $2\vec{b}$ находим по правилу умножения вектора на число: $3\vec{a}(3\cdot 1; 3\cdot(-2)) = 3\vec{a}(3;-6)$; $2\vec{b} = (2;6)$. Координаты вектора $\vec{c}$ находятся по правилу вычитания векторов: $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b} = \vec{c}(3-2;-6-6) = \vec{c}(1;-12)$.

Координаты вектора $\vec{d} = -3\vec{b}(-3;-9)$.

2. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{c}$ и $\vec{d}$;

По формуле скалярного произведения:

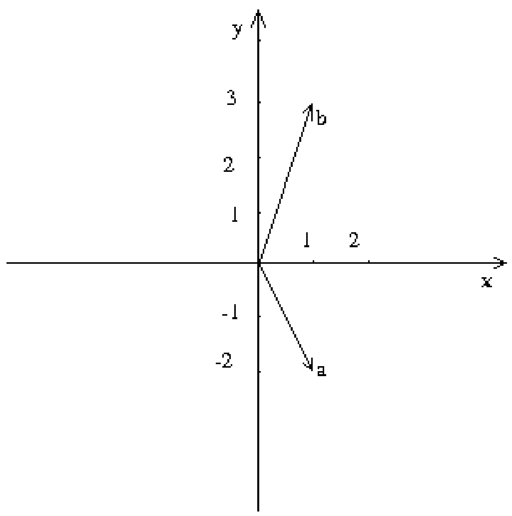
$$\vec{c}\vec{d} = 1(-30) + (-12)(-9) = -3 + 108 = 105.$$

3.Найдите длину векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$;

Длина вектора $\vec{b} = |\vec{b}| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} \approx 3.162$;

Длина вектора $\vec{c} = |\vec{c}| = \sqrt{1+144} = \sqrt{145}$.

5. Изобразите векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на координатной плоскости;



6. Определите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 1 + (-2)3}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

2. Решение типовых примеров:

Даны вершины ΔABC: A (-2; 5; 2), B (2; 3; -1), C (6; 4; -3).

1) Найти $\angle ABC$.

$\angle ABC$ - это угол между векторами $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$.

$$\cos\angle ABC = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|}$$

Найдём координаты вектора $\overrightarrow{BA}$:

$\overrightarrow{BA} = (A_x - B_x; A_y - B_y; A_z - B_z)$

$\overrightarrow{BA}$ = (-2-2; 5-3; 2-(-1)) = (-4; 2; 3)

Аналогично находим координаты вектора $\overrightarrow{BC}$:

$\overrightarrow{BC}$ = (6-2; 4-3; -3-(-1)) = (4; 1; -2)

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = -4\cdot 4 + 2\cdot 1 + 3\cdot(-2) = -16 + 2 - 6 = -20$$

$$\left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{16+4+9} = \sqrt{29}$$

$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{4^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{16+1+4} = \sqrt{21}$$

$$\cos\angle ABC = \frac{-20}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{21}} = \frac{-20}{\sqrt{609}} \approx 0{,}81$$

$$\angle ABC = \arccos(-0{,}81) = \pi - \arccos 0{,}81 = \pi - \frac{\pi}{5} = \frac{4\pi}{5}.$$

Ответ: $\angle ABC = \dfrac{4\pi}{5}$.

2) Определить вид ΔABC.

Чтобы определить вид треугольника нужно найти длины его сторон и проверить по теореме Пифагора является ли он прямоугольным.

$\left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{29}$

$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{21}$

$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{64+1+25} = \sqrt{90}$

По т. Пифагора: $\overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BC}^2$

$\left(\sqrt{90}\right)^2 = \left(\sqrt{29}\right)^2 + \left(\sqrt{21}\right)^2$

$90 \neq 29+21$

Следовательно, ΔABC - косоугольный, разносторонний.

3) Вычислить координаты вектора $\vec{b} = 2\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{CB}$

$2\overrightarrow{AC}$ = 2 (8; -1; -5) = (16; -2; -10)

$-4\overrightarrow{BA}$ = -4 (-4; 2; 3) = (16; -8; -12)

$3\overrightarrow{CB} = -3\overrightarrow{BC}$ = -3 (4; 1; -2) = (-12; -3; 6)

$$\begin{array}{l} 2\overrightarrow{AC} = (16; -2; -10) \\ -4\overrightarrow{BA} = (16; -8; -12) \\ \underline{3\overrightarrow{CB} = (-12; -3; 6)} \end{array}$$

$$2\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{CB} = (20;-13;-16)$$

Ответ: $\vec{b}$ (20;-13;-16)

Практическое занятие №11

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ

Цель практического занятия: закрепить теоретический материал и выработать навыки выполнения операций вычисления площадей поверхностей геометрических тел.

Подготовка к работе:

Изучение теоретического материала лекционных занятий, учебной литературы, Интернет-ресурсов, раздела « Краткие сведения из теории» настоящего описания ПЗ;

Задание:

Выполнение заданий в соответствии с номером варианта

Вариант №1 1) В правильной треугольной призме сторона основания равна a=3см; высота равна h =15см. Вычислите площадь боковой и полной поверхности призмы. 2) Основанием пирамиды DABC является треугольник ABC, у которого AB=AC=13см; BC=10см. Ребро AD перпендикулярно к плоскости основания и равно 9см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды. 3) Высота цилиндра на 12см больше его радиуса, а площадь полной поверхности равна 288π см². Найдите радиус основания и высоту цилиндра. 4) Вычислите радиус круга, площадь которого равна площади сферы радиуса 5м.
Вариант №2 1) В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 4см, а длина диагонали основания – $6\sqrt{2}$ см. Найдите площадь боковой и полной поверхности пирамиды. 2) Стороны основания прямого параллелепипеда равны 8см и 15см и образуют угол 60º. Меньшая из площадей диагональных сечений равна 130см². Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда. 3) Угол между образующей и осью конуса равен 45º, образующая равна 6,5см. Найдите площадь боковой поверхности конуса. 4) Радиусы двух параллельных сечений сферы равны 9см и 12см. Расстояние между секущими плоскостями равно 3см. Найдите площадь поверхности сферы.
Вариант №3 1) В правильной четырехугольной призме сторона основания равна a=12дм; высота равна h=8дм. Вычислите площадь боковой и полной поверхности призмы.

2) Основаниями усеченной пирамиды являются правильные треугольники со сторонами 3см и 5см. Одно из боковых ребер перпендикулярно к плоскости основания и равно 1см. Найдите площадь боковой поверхности усеченной пирамиды.

3) Высота цилиндра на 3см меньше его радиуса, а площадь полной поверхности равна 208π см². Найдите радиус основания и высоту цилиндра.

4) Сечение шара плоскостью, удаленной от его центра на 12м имеет площадь 25π м².

Найдите площадь поверхности шара.

Вариант №4

1) В правильной треугольной пирамиде высота равна $4\sqrt{3}$ см, а сторона основания – $4\sqrt{2}$ см. Найдите площадь боковой и полной поверхности пирамиды.

2) Стороны основания прямого параллелепипеда равны 8см и 15см и образуют угол 60º. Меньшая из площадей диагональных сечений равна 130см². Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

3) Радиусы оснований усеченного конуса равны 3см и6см, а высота – 4см. Найдите площадь полной поверхности усеченного конуса.

4) Линия пересечения сферы и плоскости, удаленной от центра сферы на 8см, имеет длину 12π см. Найдите площадь поверхности сферы.

Вариант №5

1) В правильной треугольной призме сторона основания равна a=8см; высота равна h =10см. Вычислите площадь боковой и полной поверхности призмы.

2) В правильной треугольной пирамиде высота равна 12см, а высота основания – 15 см. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

3) Прямоугольный треугольник с катетами, равными 3см и4см, вращается вокруг прямой, содержащей гипотенузу. Найдите площадь поверхности тела вращения.

4) Вычислите радиус шара, площадь поверхности которого равна площади круга радиуса 12м.

Вариант №6

1) В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 12см, а длина диагонали основания – $8\sqrt{2}$ см. Найдите площадь боковой и полной поверхности пирамиды.

2) Стороны основания прямого параллелепипеда равны 8см и 15см и образуют угол 120º. Меньшая из площадей диагональных сечений равна 130см². Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

3) Угол между образующей и осью конуса равен 60º, образующая равна 10см. Найдите площадь боковой поверхности конуса. 4) Радиусы двух параллельных сечений сферы равны 8см и 12см. Расстояние между секущими плоскостями равно 3см. Найдите площадь поверхности сферы.
Вариант №7 1) В правильной треугольной призме сторона основания равна a =10дм; высота равна h =8дм. Вычислите площадь боковой и полной поверхности призмы. 2) Основаниями усеченной пирамиды являются правильные треугольники со сторонами 4см и 6см. Одно из боковых ребер перпендикулярно к плоскости основания и равно 3см. Найдите площадь боковой поверхности усеченной пирамиды. 3) Высота цилиндра на 3см меньше его радиуса, а площадь полной поверхности равна 208π см². Найдите радиус основания и высоту цилиндра. 4) Сечение шара плоскостью, удаленной от его центра на 12дм имеет площадь 25π м². Найдите площадь поверхности шара.
Вариант №8 1) В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 8м, а длина диагонали основания – $4\sqrt{2}$ м. Найдите площадь боковой и полной поверхности пирамиды. 2) Стороны основания прямого параллелепипеда равны 8см и 15см и образуют угол 60º. Меньшая из площадей диагональных сечений равна 130см². Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда. 3) Угол между образующей и осью конуса равен 30º, образующая равна 12см. Найдите площадь боковой поверхности конуса. 4) Используя формулу площади поверхности сферы, докажите, что площади двух сфер относятся, как квадраты их радиусов.

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомиться с методическими указаниями;
2. Выбрать свой вариант;
3. Решить задание и ответить на вопросы

Содержание отчета:

Подробное решение заданий в соответствии с номером варианта представить в рабочих тетрадях;

Приложение

1. Краткие сведения из теории

ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТЕЙ МНОГОГРАННИКОВ.

1. ПРИЗМА.

Площадью полной поверхности призмы наз. сумма площадей всех ее граней, а *площадью боковой поверхности призмы* – сумма площадей ее боковых граней.

$$S_{\text{ïîëí .}} = S_{\text{áîê}} + 2S_{\text{îñí}}$$

Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы:

$$S_{\text{áîê}} = P_{\text{îñí}} \cdot h$$

2. ПИРАМИДА.

Площадью полной поверхности пирамиды наз. сумма площадей всех ее граней (т. е. основания и боковых граней), а *площадью боковой поверхности пирамиды* – сумма площадей ее боковых граней.

$$S_{\text{ïîëí}} = S_{\text{áîê}} + S_{\text{îñí}}$$

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему (апофема – высота боковой грани пирамиды).

$$S_{\text{áîê}} = \frac{1}{2} P_{\text{îñí}} \cdot h_a$$

УСЕЧЕННАЯ ПИРАМИДА.

Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему.

$$S = \frac{1}{2}(P_{\text{îñí}\,1} + P_{\text{îñí}\,2}) \cdot h_a$$

ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ.

1. ЦИЛИНДР.

Площадью полной поверхности цилиндра наз. сумма площадей боковой поверхности и двух оснований.

$$S_{\text{öèëèíäðà}} = 2\pi r(r + h)$$

За площадь боковой поверхности цилиндра принимается площадь его развертки.

$$S_{áîê} = 2\pi rh \ ,$$

где r – радиус основания цилиндра,

h – высота цилиндра.

2. КОНУС.

Площадью полной поверхности конуса наз. сумма площадей боковой поверхности и основания.

$$S_{êîíóñà} = \pi r(r + l)$$

За площадь боковой поверхности конуса принимается площадь его развертки.

$$S_{áîê} = \pi rl \ ,$$

где r – радиус основания конуса,

l – образующая конуса.

УСЕЧЕННЫЙ КОНУС.

Площадь боковой поверхности усеченного конуса равна произведению полусуммы длин окружностей оснований на образующую.

$$S_{áîê} = \pi(r + r_1)l \ ,$$

где r – радиус нижнего основания,

r_1 – радиус верхнего основания,

l – образующая усеченного конуса.

3. СФЕРА.

За площадь сферы принимают предел последовательности площадей поверхностей описанных около сферы многогранников при стремлении к нулю наибольшего размера каждой грани.

$$S = 4\pi R^2 ,$$

где R – радиус сферы.

2. Решение типовых примеров:

Пример №1

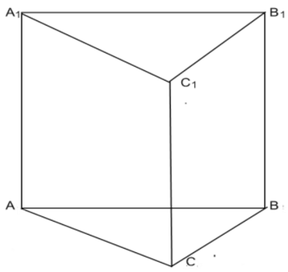
Основание прямой призмы – треугольник со сторонами 3 см и 5 см и углом 120º между ними. Наибольшая из площадей боковых граней равна 35 см². Найдите площадь боковой поверхности призмы.

Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – прямая призма;

$AC = 3$см; $BC = 5$см;

$\angle ACB = 120^o$;

$S_{A_1ABB_1} = 35$см².



Найти: $S_{áîê}$

Решение.

1) Рассмотрим треугольник ABC:

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos 120^0 = 9 + 25 + 15 = 49$см; AB = 7см;

AB – большая сторона треугольника ABC,

значит A_1ABB_1 – большая боковая грань призмы.

2) Боковая грань прямой призмы – прямоугольник.

$S_{A_1ABB_1} = AB \cdot AA_1 = 35$см²

$AA_1 = 5$см

3) Площадь боковой поверхности прямой призмы: $S_{áîê} = P_{îñí} \cdot h$;

$S_{áîê} = (3 + 5 + 7) \cdot 5 = 75$см²

Ответ: $S_{áîê} = 75$ см².

Пример №2.

Прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8 см вращается вокруг меньшего катета. Вычислите площадь полной поверхности конуса.

Решение.

$S_{êîíóñà} = \pi r(r + l)$

Радиусом конуса является меньший катет данного прямоугольного треугольника; $r = 6$см.

Образующей конуса является гипотенуза данного прямоугольного треугольника; $l = 10$см.

$S_{áîê} = \pi \cdot 6 \cdot (6 + 10) = 96\pi$ (см²)

Ответ: $S_{áîê} = 96\pi$ см²

Пример №3.

Площадь сечения сферы, проходящего через ее центр равна 9м².Найдите площадь сферы.

Решение.

1) Сечение сферы плоскостью – окружность;

площадь сечения – площадь круга, ограниченного этой окружностью.

$$S_{\text{êðóãà}} = \pi R^2 = 9\,\text{м²}; \quad R^2 = \frac{9}{\pi}$$

2) $S_{\text{ñôåðû}} = 4\pi R^2$

Радиус сферы равен радиусу сечения, проходящего через центр сферы.

$$S_{\text{ñôåðû}} = 4\pi \cdot \frac{9}{\pi} = 36\,\text{м²}$$

Ответ: $S_{\text{ñôåðû}} = 36\,\text{м²}$

Практическое занятие №12

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМОВ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ

Цель практического занятия*:* закрепить теоретический материал и выработать навыки выполнения операций вычисления объемов геометрических тел.

Подготовка к работе:

Изучение теоретического материала лекционных занятий, учебной литературы, Интернет-ресурсов, раздела « Краткие сведения из теории» настоящего описания ПЗ;

Задание:

Выполнение заданий в соответствии с номером варианта

Вариант №1 1) Измерения прямоугольного параллелепипеда 8см, 12см и 18см. Найдите ребро куба, объем которого равен объему этого параллелепипеда. 2) Найдите объем конуса, если его образующая 13см, а площадь осевого сечения равна 60см^2. 3) Алюминиевый провод диаметром 1мм имеет массу 3,2кг. Найдите длину провода (плотность алюминия 2,6г ⁄ см^3). 4)Диаметр Луны составляет (приблизительно) четвертую часть диаметра Земли. Сравните объемы Луны и Земли, считая их шарами.
Вариант №2 1) Найдите объем правильной треугольной призмы, у которой каждое ребро равно 8дм. 2) Найдите объем конуса, если площадь его основания равна G, а площадь боковой поверхности равна P. 3) Свинцовая труба (плотность свинца 11,4 г ⁄ см^3) с толщиной стенок 5мм имеет внутренний диаметр 15мм. Какова масса трубы, если ее длина равна 15м. 4) Цилиндр и конус имеют общее основание и высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса 22дм^3
Вариант №3 1) Измерения прямоугольного параллелепипеда 5см, 10см и 12см. Найдите ребро куба, объем которого равен объему этого параллелепипеда. 2) Найдите объем конуса, если его образующая n см, а площадь осевого сечения равна m см^2.

3) Алюминиевый провод диаметром 5мм имеет массу 7,2кг. Найдите длину провода (плотность алюминия 2,6г ⁄ см³). 4) В цилиндрическую мензурку диаметром 2,5см, наполненную водой до некоторого уровня, опускают 4 равных металлических шарика диаметром 1см. На сколько изменится уровень воды в мензурке?
Вариант №4 1) Найдите объем правильной треугольной призмы, у которой каждое ребро равно 15см. 2) Объем конуса равен 176см³. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса. 3) Свинцовая труба (плотность свинца 11,4 г ⁄ см³) с толщиной стенок 4мм имеет внутренний диаметр 13мм. Какова масса трубы, если ее длина равна 25м. 4) Цилиндр и конус имеют общее основание и высоту. Вычислите объем конуса, если объем цилиндра 60см³
Вариант №5 1) Измерения прямоугольного параллелепипеда 6см, 8см и 10см. Найдите ребро куба, объем которого равен объему этого параллелепипеда. 2) Найдите объем конуса, если его образующая 13см, а площадь осевого сечения равна 60см². 3) Алюминиевый провод диаметром 4мм имеет массу 6,8кг. Найдите длину провода (плотность алюминия 2,6г ⁄ см³). 4)Диаметр Луны составляет (приблизительно) четвертую часть диаметра Земли. Сравните объемы Луны и Земли, считая их шарами.
Вариант №6 1) Найдите объем правильной четырехугольной призмы, у которой каждое ребро равно 18см. 2) Объем конуса равен 176см³. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса. 3) Свинцовая труба (плотность свинца 11,4 г ⁄ см³) с толщиной стенок 2см имеет внутренний диаметр 8см. Какова масса трубы, если ее длина равна 10м. 4) Цилиндр и конус имеют общее основание и высоту. Вычислите объем конуса, если объем цилиндра 180м³
Вариант №7

1) Найдите объем правильной треугольно пирамиды, высота которой равна 8см, а сторона основания 4см. 2) Найдите объем конуса, если его образующая 13см, а площадь осевого сечения равна 60см². 3) Алюминиевый провод диаметром 3мм имеет массу 5,4кг. Найдите длину провода (плотность алюминия 2,6г/см³). 4)Диаметр Луны составляет (приблизительно) четвертую часть диаметра Земли. Сравните объемы Луны и Земли, считая их шарами.
Вариант №8 1) Используя формулу площади поверхности сферы, докажите, что площади двух сфер относятся, как квадраты их радиусов. 2) Измерения прямоугольного параллелепипеда 4см, 10см и 12см. Найдите ребро куба, объем которого равен объему этого параллелепипеда. 3) Найдите объем конуса, если его образующая 13см, а площадь осевого сечения равна 60см². 4) В цилиндрическом сосуде уровень жидкости равен 9см. На какой высоте будет находится уровень жидкости, если ее перелить в другой цилиндрический сосуд, диаметр которого в 2 раза меньше диаметра первого

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомиться с методическими указаниями;
2. Выбрать свой вариант;
3. Решить задание и ответить на вопросы

Содержание отчета:

Подробное решение заданий в соответствии с номером варианта представить в рабочих тетрадях;

Приложение

1. Краткие сведения из теории

Все геометрические тела имеют объемы, которые можно измерить с помощью выбранной единицы объема. За единицу измерения объемов принимают куб, ребро которого равно единице измерения отрезков.

При выбранной единице измерения объем каждого тела выражается положительным числом, которое показывает сколько единиц измерения объемов и частей единицы содержится в данном геометрическом теле.

СВОЙСТВА ОБЪЕМОВ.

1 свойство. Равные тела имеют равные объемы.

2 свойство. Если тело составлено из нескольких тел, то его объем равен сумме объемов этих тел.

ОБЪЕМЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ.

1. ПРЯМАЯ ПРИЗМА.

Объем прямой призмы равен произведению площади основания на высоту.

$$V = S_{\text{îñí}} \cdot h$$

2. ЦИЛИНДР.

Объем цилиндра равен произведению площади основания цилиндра на высоту.

$$V = S_{\text{îñí}} \cdot h = \pi r^2 h$$

3. НАКЛОННАЯ ПРИЗМА.

Объем наклонной призмы равен произведению площади основания на высоту.

$$V = S_{\text{îñí}} \cdot h$$

Для наклонной призмы существует и другой способ вычисления объема. Можно вычислить объем наклонной призмы как произведение бокового ребра на площадь перпендикулярного ему сечения.

4. ПИРАМИДА.

Объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{îñí}} \cdot h$$

5. КОНУС.

Объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{îñí}} \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

3. ШАР.

$$V = \frac{4}{3} S_{\text{îñí}} \cdot h$$

2. Решение типовых примеров

Пример №1.

Найдите объем правильной треугольной пирамиды, высота которой равна 12см, а сторона основания 13см.

Решение.

1) Площадь правильного треугольника можно вычислить по формуле: $S_{\Delta} = \frac{1}{2}a^2 \sin 60^{\circ}$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 13^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{169\sqrt{3}}{4} \text{ (см}^2\text{)}$$

2) Объем пирамиды $V = \frac{4}{3} S_{\hat{\imath}\tilde{n}\acute{\imath}} \cdot h$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{169\sqrt{3}}{4} \cdot 12 = 169\sqrt{3} \text{ (см}^3\text{)}$$

Ответ: $V = 169\sqrt{3}$ см³.

Пример №2.

Какое количество нефти (в тоннах) вмещает цилиндрическая цистерна диаметром 18 метров и высотой 7 метров, если плотность нефти равна 0,85 г ⁄ см³

Решение.

1) Радиус цистерны 9м.

Основание цилиндрической цистерны – круг; площадь основания $S = \pi R^2 = 81\pi$ (м²)

2) Объем цистерны $V = S_{\hat{\imath}\tilde{n}\acute{\imath}} \cdot h = 81\pi \cdot 7 = 567\pi \approx 1780{,}38$ (м³)

3) Плотность нефти 0,85 г ⁄ см³=0,85т ⁄ м³

4) Количество нефти 1780,38·0,85≈1513(т)

Ответ: цистерна вмещает приблизительно 1513 т нефти.

Пример №3.

Прямоугольный параллелепипед описан около шара радиуса 0,5см. Найдите его объем.

Решение.

1) Если прямоугольный параллелепипед описан около шара, значит это куб, причем ребро куба равно удвоенному радиусу шара.

2) Объем куба $V = a^3 = 1^3 = 1$ (м³)

Ответ: $V = 1$м³.